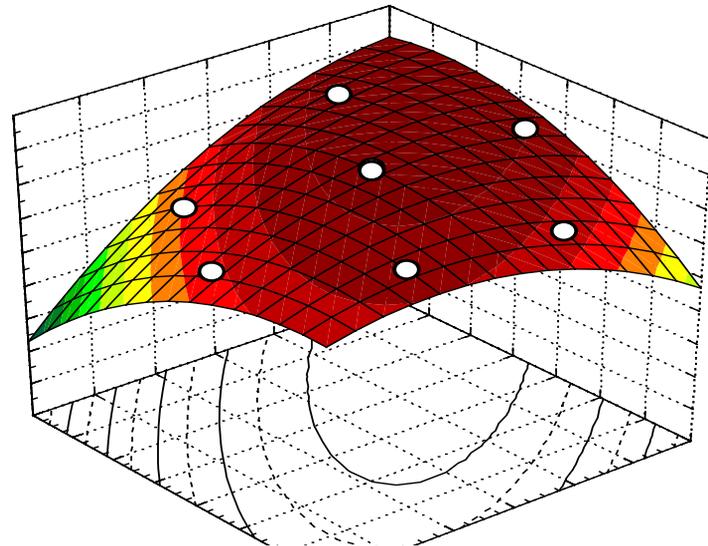


Plans d'expérience pour l'estimation de surfaces de réponse



Le problème

Objectif

- Etude du sens, de l'amplitude et de la forme des effets des facteurs sur les réponses
- Prédiction et optimisation des réponses.

Facteurs : Quantitatifs

Modèle : Quadratique complet

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \beta_{11} X_1^2 + \dots + \beta_{kk} X_k^2 \\ + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \dots + \beta_{(k-1)k} X_{k-1} X_k + \varepsilon$$

But

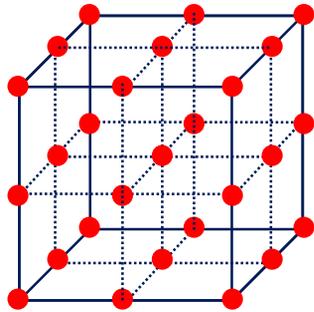
- Choisir un “bon” plan qui donne des estimations et prédictions précises

Quelles sont les caractéristiques attendues du plan ?

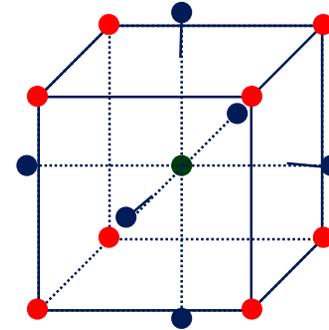


Les solutions proposées

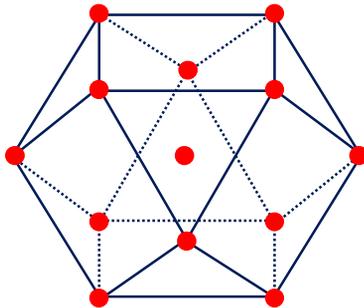
Plan factoriel complet 3^k



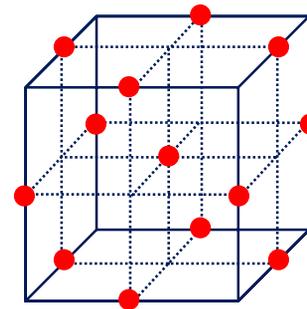
Plan composite centré



Plan de Doehlert



Plan de Box et Behnken



S1 : Plan factoriel complet 3^k

Définition

- Plan formé de toutes les combinaisons des niveaux minimum, milieu et maximum de k facteurs. Le nombre d'essais est 3^k.

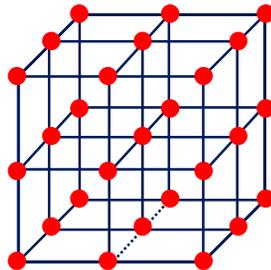
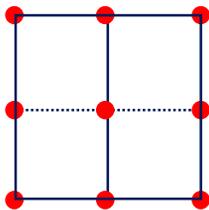
Modèle

- Tout modèle comprenant des termes du type $X_1^{a_1} \times X_2^{a_2} \times \dots \times X_k^{a_k}$ où a_i est 0, 1 ou 2. Par exemple : Cst, X_i , X_i^2 , $X_i X_j$, $X_i X_j X_k$, $X_i^2 X_j$

Propriétés

- Simple, très bonnes propriétés statistiques mais coûteux

Plans à deux et trois facteurs

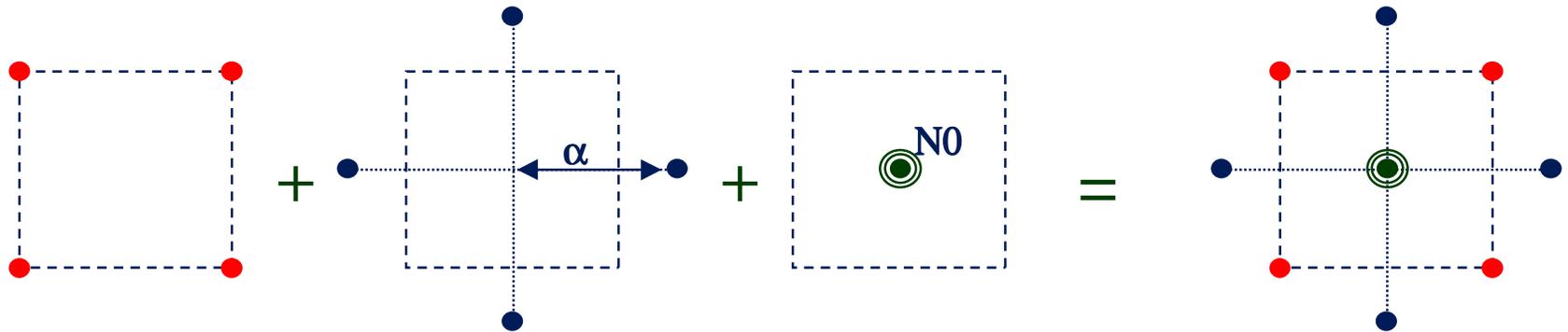


Coût par rapport au nb de paramètres du modèle quadratique

k	2	3	4	5
n	9	27	81	243
p	6	10	15	21



S2 : Plan composite : définition



Définition : Un plan **composite centré** à k facteurs est composé de

- N_f essais d'un plan factoriel complet ou fractionnaire $2^{(k-r)}$
- $2k$ essais en étoile sur les axes à une distance α du centre du domaine
- N_0 essais au centre du domaine

Modèle associé : Modèle quadratique

Coût : $N = 2^{(k-r)} + 2k + N_0$

k	2	3	4	5
n	9	15	25	27
p	6	10	15	21

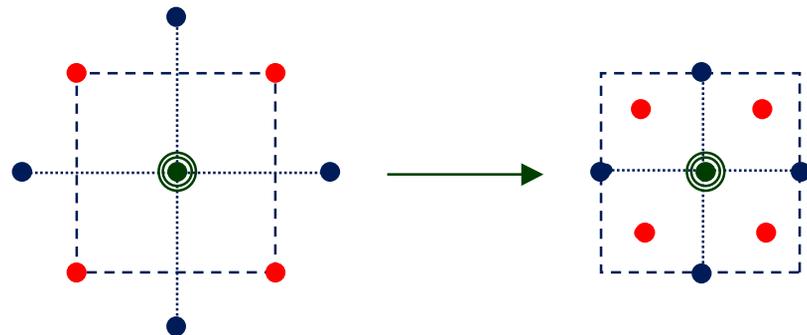
avec $N_0=1$



S2 : Plan composite : construction

Comment choisir les paramètres du plan ?

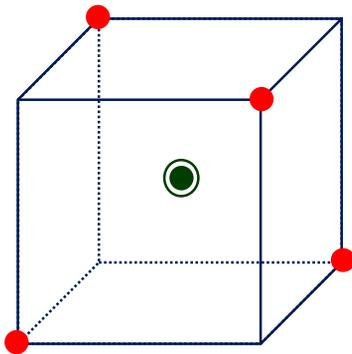
- **r** : Choisir un plan factoriel de résolution 5. Pour $k < 5$, $r=0$
- **α** : Dépend des propriétés statistiques désirées pour le plan
- **N0** : Choisir $N0 > 1$ pour pouvoir estimer la variance expérimentale et en fonction des propriétés statistiques désirées pour le plan
- **Echelle** : Un plan composite de base a ses essais sur les axes hors du domaine $(-\alpha, \alpha)$. Il est d'usage de le remettre à l'échelle



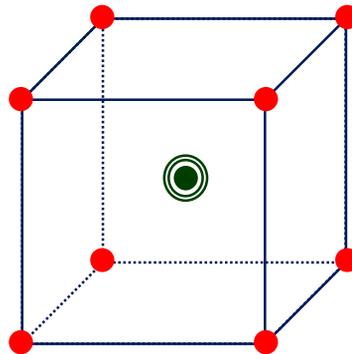
S2 : Plan composite : un plan séquentiel

Le plan composite est spécialement bien adapté à une étude séquentielle par rapport au modèle :

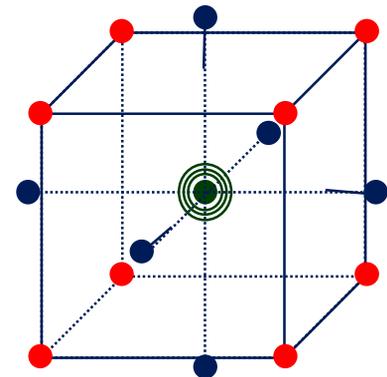
Etape 1



Etape 2



Etape 3



Modèle :

Nb d'essais :



S2 : Plan composite : choix de α et N_0

Choix de α :

- $\alpha = 1$: Essais sur les faces du cube. Choix commode, les facteurs n'ont que trois niveaux.
- $\alpha = \sqrt{k}$: Essais sur une sphère de rayon \sqrt{k} .
- $\alpha = \sqrt[4]{Nf}$: En prédiction, assure l'isovariance par rotation (rotatabilité) du plan pour l'estimation d'un modèle d'ordre 2
- $\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{Nf \times N} - Nf}{2}}$: En estimation, assure la (presque)-orthogonalité des estimateurs.

Choix de N_0 :

- $N_0 > 1$ choisi par l'expérimentateur en fonction de son budget
- $N_0 = 4\sqrt{Nf} + 4 - 2k$ pour assurer orthogonalité et rotatabilité



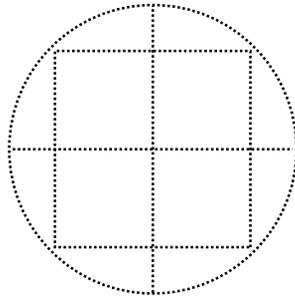
S2 : Plan composite : choix de α et N_0 pour $k = 2$

Plan rotatable

$$\alpha = \sqrt[4]{Nf} = \dots\dots\dots$$

$$N_0 = 1$$

$$N = \dots\dots\dots$$

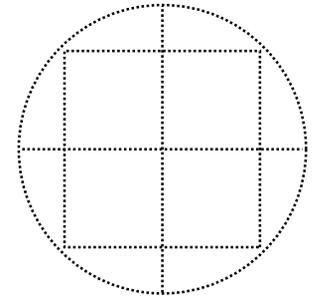


Plan orthogonal

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{Nf} \times N - Nf}{2}} = \dots\dots\dots$$

$$N_0 = 1$$

$$N = \dots\dots\dots$$

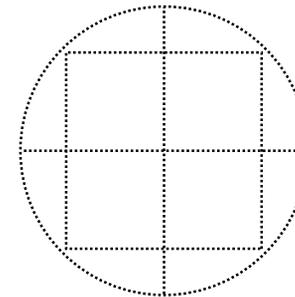


Plan rotatable et orthogonal

$$\alpha = \sqrt[4]{Nf} = \dots\dots\dots$$

$$N_0 = 4\sqrt{Nf} + 4 - 2k = \dots\dots\dots$$

$$N = \dots\dots\dots$$



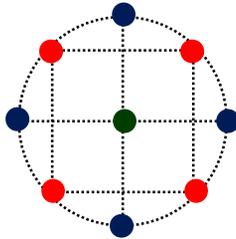
S2 : Plan composite : propriétés pour k = 2

Plan

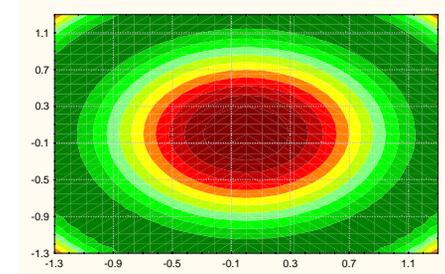
Ecart-type et corrélations
des paramètres

Variances
des prédictions

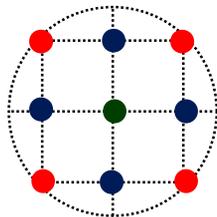
Rotatable



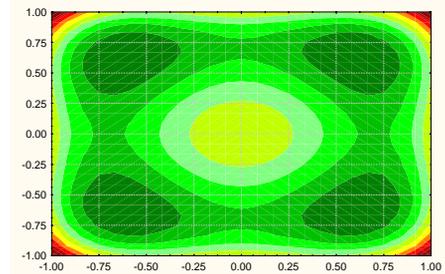
	s(b)	Cst	X ₁	X ₂	X ₁ ²	X ₂ ²	X ₁ X ₂
Cst	1	1	0	0	-.48	-.48	0
X ₁	.35		1	0	0	0	0
X ₂	.35			1	0	0	0
X ₁ ²	.48				1.	.47	0
X ₂ ²	.48					1	0
X ₁ X ₂	.5						1



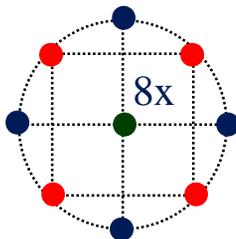
Orthogonal



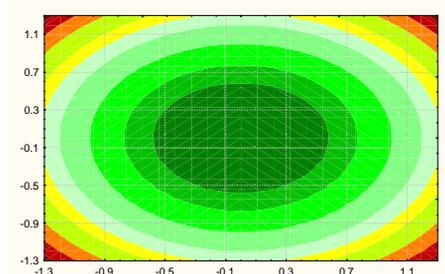
	s(b)	Cst	X ₁	X ₂	X ₁ ²	X ₂ ²	X ₁ X ₂
Cst	.75	1	0	0	-.63	-.63	0
X ₁	.41		1	0	0	0	0
X ₂	.41			1	0	0	0
X ₁ ²	.71				1.	0	0
X ₂ ²	.71					1	0
X ₁ X ₂	.5						1



Rotatable et
Orthogonal



	s(b)	Cst	X ₁	X ₂	X ₁ ²	X ₂ ²	X ₁ X ₂
Cst	.35	1	0	0	-.5	-.5	0
X ₁	.35		1	0	0	0	0
X ₂	.35			1	0	0	0
X ₁ ²	.35				1.	0	0
X ₂ ²	.35					1	0
X ₁ X ₂	.5						1



S2 : Tableau pour le choix de α , N_0 et r

k : nb de facteurs	2	3	4	5	5	6	6	7	8
p = nb de paramètres	6	10	15	21	21	28	28	36	45
r	0	0	0	0	1	0	1	1	2
Nf	4	8	16	32	16	64	32	64	64
Générateurs					I=12345		I=123456	I=1234567	I=12345 I=12678
Nb pts supports	9	15	25	43	27	77	45	79	81
Choix de α									
Rotatable	1.41	1.68	2	2.38	2	2.83	2.38	2.83	2.83
Orthogonal (N0=1)	1	1.22	1.41	1.6	1.55	1.76	1.72	1.88	2
Orthogonal (N0=2)	1.08	1.29	1.48	1.68	1.61	1.82	1.78	1.94	2.05
Orthogonal (N0=3)	1.15	1.35	1.55	1.72	1.66	1.88	1.84	2	2.11
N0 Rota et Ortho	8	9	12	17	10	24	15	22	20



S3 : Plan de Doehlert : définition

Définition

- Plan formé de N_0 essais au centre du domaine et de k^2+2k essais répartis “le plus uniformément possible” sur une sphère de rayon 1. Il est souvent “dilaté” pour mieux couvrir le domaine expérimental.

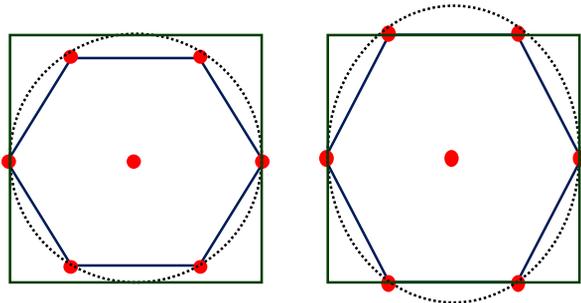
Modèle : modèle quadratique

Propriétés

- Peu coûteux, très bonnes propriétés de séquentialité, propriétés statistiques moins “parfaites” que pour le plan composite et factoriel 3^k

Coût : $N = k^2 + k + 1$

Plans sphérique et “dilaté”

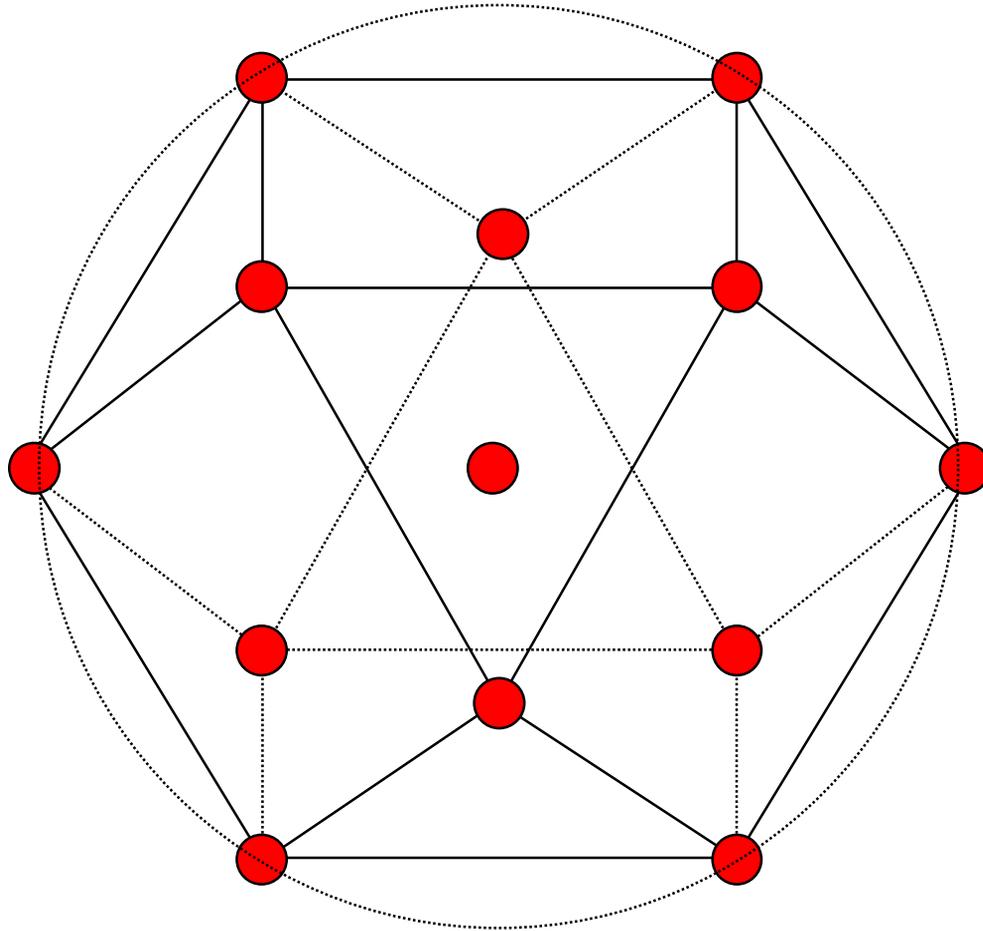


k	2	3	4	5
n	7	13	21	31
p	6	10	15	21

avec $N_0=1$



S3 : Plan de Doehlert à 3 facteurs



S3 : Plan de Doehlert : construction (1)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	-0.500	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.500	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	-0.500	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.500	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	-0.500	-0.333	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.500	0.333	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	-0.500	0.333	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
11	0.000	-0.667	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
12	0.500	-0.333	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
13	0.000	0.667	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
14	-0.500	-0.333	-0.250	-1.000	0.000	0.000	0.000
15	0.500	0.333	0.250	1.000	0.000	0.000	0.000
16	-0.500	0.333	0.250	1.000	0.000	0.000	0.000
17	0.000	-0.667	0.250	1.000	0.000	0.000	0.000
18	0.000	0.000	-0.750	1.000	0.000	0.000	0.000
19	0.500	-0.333	-0.250	-1.000	0.000	0.000	0.000
20	0.000	0.667	-0.250	-1.000	0.000	0.000	0.000
21	0.000	0.000	0.750	-1.000	0.000	0.000	0.000
22	-0.500	-0.333	-0.250	-0.200	-1.000	0.000	0.000
23	0.500	0.333	0.250	0.200	1.000	0.000	0.000
24	-0.500	0.333	0.250	0.200	1.000	0.000	0.000
25	0.000	-0.667	0.250	0.200	1.000	0.000	0.000
26	0.000	0.000	-0.750	0.200	1.000	0.000	0.000
27	0.000	0.000	0.000	-0.800	1.000	0.000	0.000
28	0.500	-0.333	-0.250	-0.200	-1.000	0.000	0.000
29	0.000	0.667	-0.250	-0.200	-1.000	0.000	0.000
30	0.000	0.000	0.750	-0.200	-1.000	0.000	0.000
31	0.000	0.000	0.000	0.800	-1.000	0.000	0.000



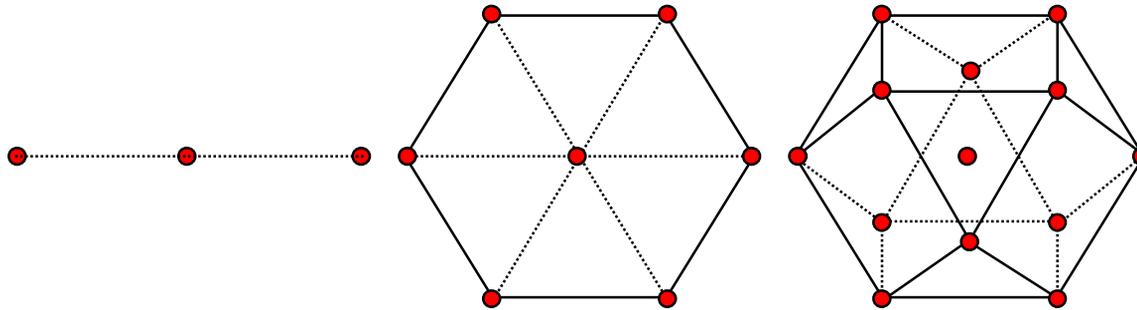
S3 : Plan de Doehlert : construction (2)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
32	-0.500	-0.333	-0.250	-0.200	-0.167	-1.000	0.000
33	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	1.000	0.000
34	-0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	1.000	0.000
35	0.000	-0.667	0.250	0.200	0.167	1.000	0.000
36	0.000	0.000	-0.750	0.200	0.167	1.000	0.000
37	0.000	0.000	0.000	-0.800	0.167	1.000	0.000
38	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.833	1.000	0.000
39	0.500	-0.333	-0.250	-0.200	-0.167	-1.000	0.000
40	0.000	0.667	-0.250	-0.200	-0.167	-1.000	0.000
41	0.000	0.000	0.750	-0.200	-0.167	-1.000	0.000
42	0.000	0.000	0.000	0.800	-0.167	-1.000	0.000
43	0.000	0.000	0.000	0.000	0.833	-1.000	0.000
44	-0.500	-0.333	-0.250	-0.200	-0.167	-0.143	-1.000
45	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	1.000
46	-0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	1.000
47	0.000	-0.667	0.250	0.200	0.167	0.143	1.000
48	0.000	0.000	-0.750	0.200	0.167	0.143	1.000
49	0.000	0.000	0.000	-0.800	0.167	0.143	1.000
50	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.833	0.143	1.000
51	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.857	1.000
52	0.500	-0.333	-0.250	-0.200	-0.167	-0.143	-1.000
53	0.000	0.667	-0.250	-0.200	-0.167	-0.143	-1.000
54	0.000	0.000	0.750	-0.200	-0.167	-0.143	-1.000
55	0.000	0.000	0.000	0.800	-0.167	-0.143	-1.000
56	0.000	0.000	0.000	0.000	0.833	-0.143	-1.000
57	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.857	-1.000



S3 : Plan de Doehlert : séquentialité

Séquentialité par rapport aux facteurs

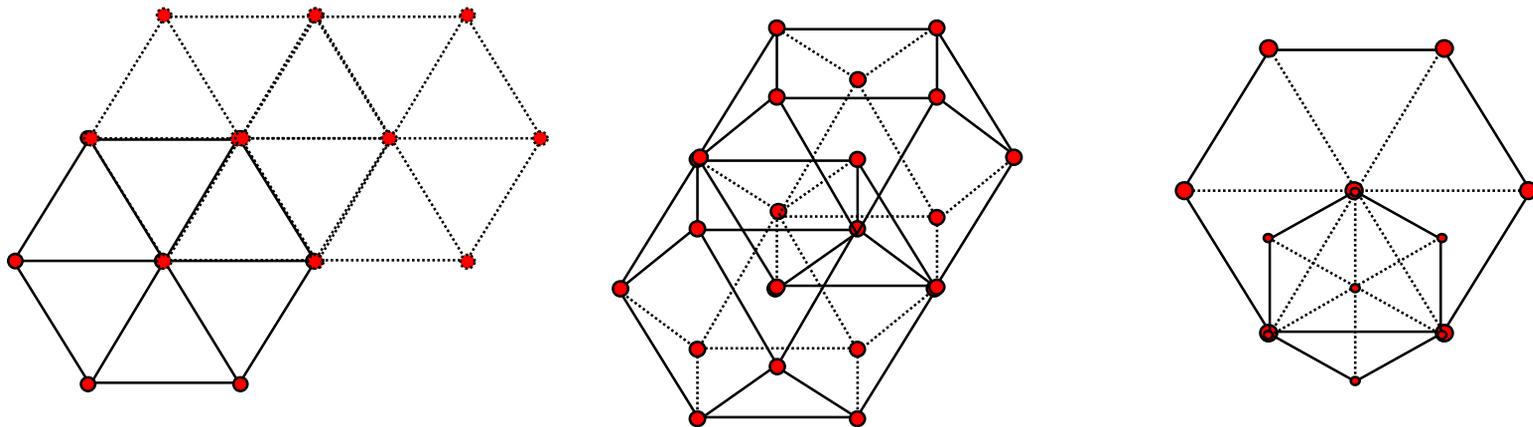


Un facteur

Deux facteurs

Trois facteurs

Séquentialité par rapport au domaine



S4 : Plan de Box-Benhken : définition

Définition

- Fraction d'un plan factoriel complet 3^k qui permet d'estimer un modèle quadratique.
- Il se construit en combinant de manière particulière un plan factoriel $2^{(k-r)}$ avec un plan de type "bloc balancé incomplet" dans le but d'obtenir un plan à 3 niveaux le plus rotatable possible qui évite les sommets du cube.

Modèle : modèle quadratique

Coût

k	3	4	5	6
n	13	25	41	49
p	10	15	21	28

avec $N_0=1$

Plan de Box-Behken à 3 facteurs

