

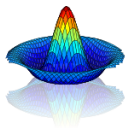
Analyse de sensibilité de Modèles: Recherche des facteurs influents

École Chercheur Mexico

Claude Bruchou

INRA — BioSp, Avignon

Giens, le 12 Mai 2009



MEXICO
WEXICO

Plan

- 1 Introduction
- 2 ANOVA
 - Planification expérimentale
 - Plan factoriel Complet équilibré
 - Modèle
 - Analyse de la variance
 - Indices de Sensibilité
 - Bilan de l'ANOVA pour l'AS
- 3 Méthode de Morris
 - Généralités
 - Plan d'expérience standard
 - Plan d'expérience standard
 - Indices
- 4 Plan Fractionnaire
 - Bilan
- 5 Bibliographie
- 6 A vous d'expérimenter

Plan

- 1 Introduction
- 2 ANOVA
 - Planification expérimentale
 - Plan factoriel Complet équilibré
 - Modèle
 - Analyse de la variance
 - Indices de Sensibilité
 - Bilan de l'ANOVA pour l'AS
- 3 Méthode de Morris
 - Généralités
 - Plan d'expérience standard
 - Plan d'expérience standard
 - Indices
- 4 Plan Fractionnaire
 - Bilan
- 5 Bibliographie
- 6 A vous d'expérimenter

La Fonction Code

Du modèle théorique à l'utilisation

- un modèle complexe
- formalisation mathématique
 - système d'équations
 - $\mathcal{G} : \Omega \subset \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(K)}) \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x})$
 - analyse théorique de $\mathcal{G} \Rightarrow$ table de variation, points singuliers, optimum, inversibilité,...
 - outils : mathématicien, crayon, calcul formel
 - mais voilà, analyse difficile voire impossible !

La Fonction Code

- Formalisation informatique de $\mathcal{G}$
 - outils : analyse numérique, langage informatique
 - codage de $\mathcal{G} \Rightarrow$ **Fonction Code** (FC) $G \sim \mathcal{G}$,
 $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(K)}) \mapsto y = G(\mathbf{x})$
 - arguments de G : facteurs contrôlés quantitatifs ou qualitatifs,
 - G **boîte noire**
- FC **déterministe** : la répétition d'une entrée produit la même sortie,
- FC **stochastique** : la répétition d'une entrée produit des sorties différentes.

Méthode non intrusive d'analyse

- recherche des facteurs influents de G pour un objectif ou critère $\mathcal{C}(y)$
- échantillonnage aléatoire :
 - tirage au hasard, selon des lois de probabilité, des niveaux $\mathbf{x}$ du K -uplet des facteurs,
 - facteurs considérés comme des variables aléatoires $\mathbf{X}$,
 - la loi de tirage des facteurs induit une loi de probabilité sur les sorties,
 - $\Rightarrow$ analyse statistique des sorties (analyse des moments),
 - on note y une réalisation de la FC, considérée comme une variable aléatoire Y .
- échantillonnage déterministe : niveaux fixés des facteurs,
- Illustration

Plan

1 Introduction

2 ANOVA

- Planification expérimentale
- Plan factoriel Complet équilibré
- Modèle
- Analyse de la variance
- Indices de Sensibilité
- Bilan de l'ANOVA pour l'AS

3 Méthode de Morris

- Généralités
- Plan d'expérience standard
- Plan d'expérience standard
- Indices

4 Plan Fractionnaire

- Bilan

5 Bibliographie

6 A vous d'expérimenter

Intérêt des plans factoriels

- étude simultanée de plusieurs facteurs en entrée,
- gain en coût expérimental et en temps,
- possibilité de détecter des interactions.

Une stratégie d'échantillonnage

- découpage des gammes de définitions des facteurs en intervalles,
- si loi d'échantillonnage non uniforme : utiliser les quantiles,
- pavage en grille de l'espace Ω ,
- R tirages uniformes indépendants dans chaque pavé
- utilisation d'un plan factoriel complet, équilibré
 - contrôle du pavage avec ou sans a priori sur la FC,
 - contrôle de la puissance,
 - valable si la FC est déterministe ou stochastique,
 - accès aux interactions d'ordre élevé.

Exemple :

- FC déterministe : $\Omega = [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Y = G(X^{(1)}, X^{(2)})$
- décomposition de la gamme $[-1, 1]$ en I (resp. J) intervalles de même amplitude pour $X^{(1)}$ (resp. $X^{(2)}$),
- $\Rightarrow$ partition de Ω en IJ pavés (unités expérimentales),
- $I = J = 3$ et $R = 2$,
- découpage de $X^{(1)}$ (resp. $X^{(2)}$) $\Rightarrow$ facteur A (resp. B)

Exemple : table des simulations

simu.	classe de A	classe de B	r	sortie Y_{ijr}
1	1	1	1	9.5
2	1	1	2	10.5
3	1	2	1	20.2
4	1	2	2	18.8
5	1	3	1	30.3
6	1	3	2	27.7
7	2	1	1	8.4
8	2	1	2	9.6
9	2	2	1	29
10	2	2	2	31
11	2	3	1	41
12	2	3	2	39
13	3	1	1	1.5
14	3	1	2	2.5
15	3	2	1	31.5
16	3	2	2	28.5
17	3	3	1	41
18	3	3	2	39

moyenne $\bar{Y}_{...} = 23.28$, variance $\sigma_Y^2 = 180.9$

Modèle d'ANOVA à effets fixes

- $Y_{i,j,r} = \mu + A_i + B_j + AB_{i,j} + \epsilon_{i,j,r}$
 $i = 1, I, j = 1, J, r = 1, R$
- $\mu = \text{constante},$
- A_i : i^{eme} effet factoriel ; $\sum_i A_i = 0,$
- B_j : j^{eme} effet factoriel ; $\sum_j B_j = 0,$
- AB_{ij} : effet d'interaction ; $\forall j, \sum_i AB_{ij} = 0$ et $\forall i, \sum_j AB_{ij} = 0,$
- ϵ erreur *aléatoire* d'espérance nulle et de variance σ_Y^2 .

- effets factoriels

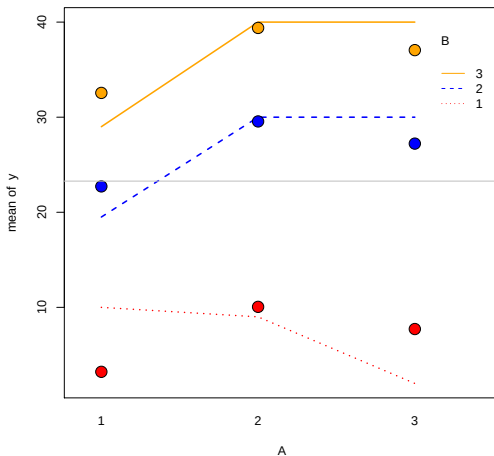
- estimateur de A_i : $\hat{A}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}$
- estimateur de B_j : $\hat{B}_j = \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}$

	A_i	B_j
1	-3.78	-16.28
2	3.06	3.22
3	0.72	13.06

- effets d'interaction

- $AB_{ij} = (E(Y_{ij}) - \mu) - A_i - B_j$
- $\Rightarrow \widehat{AB}_{ij} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}$

$i \setminus j$	1	2	3
1	6.78	-3.22	-3.56
2	-1.06	0.45	0.61
3	-5.72	2.78	2.94



points = modèle avec effets principaux
 courbes = modèle avec effets principaux + interaction
 (passent par les points d'ordonnée $\bar{Y}_{ij.}$)

Décomposition de la variabilité

$$SS_T = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{r=1}^R (Y_{ijr} - \bar{Y}_{...})^2 = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_{\epsilon} = 3075.7$$

$$SS_A = JR \sum_{i=1}^I A_i^2 = 6 \sum_{i=1}^3 (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y})^2 = 144.8, \quad SS_B = IR \sum_{j=1}^J B_j^2 = 6 \sum_{j=1}^3 (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y})^2 = 2674.8$$

$$SS_{AB} = R \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J AB_{ij}^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y})^2 = 239.6$$

$$SS_{\epsilon} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^2 (Y_{ijr} - \bar{Y}_{ij.})^2 = 253.11 = 16.6$$

$$n = IJR, \quad V(Y) \simeq \frac{SS_T}{n} = \frac{\sum_{i=1}^I A_i^2}{I} + \frac{\sum_{j=1}^J B_j^2}{J} + \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J AB_{ij}^2}{IJ} + \frac{SS_{\epsilon}}{n}$$

Analyse sous R

- tirage de l'échantillon

```
tirage.r = function(PAV,  binf, bsup, Nbclass){
#-----
#  TIRAGE uniforme des coordonnées d'un point
#          dans le pavé PAV de  $R^K$ 
#-----
#  binf et bsup : vecteurs des bornes inf et sup des facteurs,
#  Nbclass : nbre de classes par facteur,
#  PAV : vecteur de K numéros de classe (1 à Nbclass)
#  sortie = vecteur de K éléments
  K = length(PAV)
  bornes = matrix(NA,nrow=K, ncol=2)
  bornes[,1]= binf + (PAV-1)*(bsup-binf)/Nbclass
  bornes[,2]= binf + PAV*(bsup-binf)/Nbclass
  cc = numeric(K)
  for(i in 1:K) cc[i] = runif(1,min=bornes[i,1],max=bornes[i,2])
  cc
}
```


Analyse sous R

- table des simulations et anova

```
> K=2;Nbclass=3; r=2; binf=c(-1,-1); bsup=c(1,1);
> facteurs = expand.grid(X=1:Nbclass, Y=1:Nbclass, R=1:r)
# simu = matrice K x nrow(facteurs)
>simu = apply(facteurs[,1:K],1, tirage.r, binf, bsup, Nbclass)
> data = data.frame(X=as.factor(facteurs[,1],
                           Y=as.factor(facteurs[,2],
                           Z = mon.modele(simu) )
>aov.out= aov(Z ~X + Y + X:Y, data) ou aov(Z ~(X + Y)^2, data)
> summary(aov.out)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(> F)
A	2	144.78	72.39	39.294	3.573e-05
B	2	2674.78	1337.39	725.965	1.130e-10
AB	4	239.56	59.89	32.509	2.327e-05
Residuals	9	16.58	1.84		

- Quid des tests F en simulation ?
- si **échantillon aléatoire**, le test F constitue un garde fou,
- un grand échantillon peut rendre un test significatif,
- La différence détectée est-elle importante ?
- si **échantillon déterministe**, le test F n'a pas de sens,

- Indice = contribution de la somme des carrés d'un effet à SS_T
- si un facteur a plus de modalités que les autres, sa contribution sera plus forte
- indices utilisés en analyse de sensibilité (Saltelli) :
 - indices principaux
 - facteur $X^{(1)}$: $I_1 = \frac{SS_A}{SS_T} = 0.047$
 - facteur $X^{(2)}$: $I_2 = \frac{SS_B}{SS_T} = 0.87$
 - indice totaux
 - facteur $X^{(1)}$: $IT_1 = \frac{SS_A + SS_{AB}}{SS_T} = 0.125$
 - facteur $X^{(2)}$: $IT_2 = \frac{SS_B + SS_{AB}}{SS_T} = 0.95$
- part d'alea de l'anova : $\frac{SS_\epsilon}{SS_T} = 0.005$

- grande souplesse, clarté de l'interprétation,
- donne des pistes pour un meta-modèle,
- nombreux plans dans la littérature,
- modèle linéaire limité pour certaines non-linéarités de la FC,
- Si nombreux facteurs et/ou FC coûteuse en temps, plan complet inabordable
 - exemple : 30 facteurs, découpés en 3 intervalles, sans répétitions ($R = 1$), $\Rightarrow 3^{30} \sim 2 \times 10^{14}$ simulations
 - $t_{exec} = 10^{-4}s$, ferme de 1000 processeurs $\Rightarrow T_{tot} = 7.8$ mois.
- nécessité de méthodes *exploratoires* moins coûteuses $\Rightarrow$ Morris,
- Interactions d'ordre élevé peu importantes $\Rightarrow$ plans fractionnaires.

Plan

- 1 Introduction
- 2 ANOVA
 - Planification expérimentale
 - Plan factoriel Complet équilibré
 - Modèle
 - Analyse de la variance
 - Indices de Sensibilité
 - Bilan de l'ANOVA pour l'AS
- 3 Méthode de Morris
 - Généralités
 - Plan d'expérience standard
 - Plan d'expérience standard
 - Indices
- 4 Plan Fractionnaire
 - Bilan
- 5 Bibliographie
- 6 A vous d'expérimenter

Généralités

- méthode exploratoire
- FC à temps de calcul élevé
- plan OAT (One At a Time) : on fait varier un seul facteur à la fois.

Plan d'expérience standard

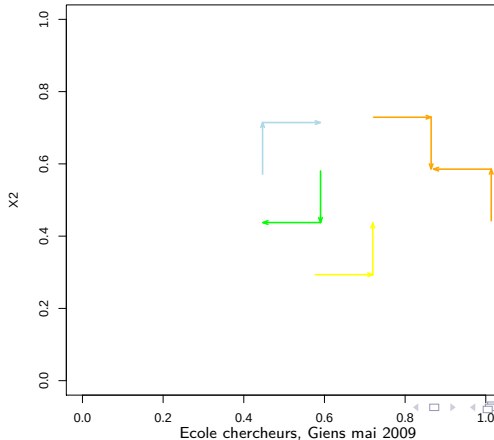
- K facteurs définis dans $[0, 1]$,
- loi d'échantillonnage uniforme pour chaque facteur,
- discrétisation des facteurs en Q niveaux équiprobables,
- $\tilde{\Omega}_i = \{0, \frac{1}{Q-1}, \frac{2}{Q-1}, \dots, \frac{Q-1}{Q-1} = 1\} \subset [0, 1]$,
- grille $\tilde{\Omega} = \otimes_{i=1}^K \tilde{\Omega}_i \subset [0, 1]^K$,
- un point de base P^* est choisi au hasard sur la grille,
- accroissement de $\delta > 0$ de une ou plusieurs coordonnées de P^*
 $\Rightarrow P_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(K)})$ 1er point de la trajectoire dans $\tilde{\Omega}$

Plan d'expérience standard

- P_2 2ième point de la trajectoire par variation d'une **seule** coordonnée i de P_1 :
 - soit $x_j^{(i)}$ la valeur du facteur $X^{(i)}$ pour le point j
 - $P_2 = (x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(K)}) = (x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(i)} + \epsilon\delta, \dots, x_1^{(K)}) \in \tilde{\Omega}$
 - $\epsilon = \pm 1$ orientation aléatoire,
 - $\delta \propto \frac{1}{Q-1}$ commun à tous les facteurs.
- P_3 est obtenu à partir de P_2 en faisant varier une coordonnée i' autre que i ,
- P_4 est obtenu à partir de P_3 en faisant varier une coordonnée i'' autre que i et i' ,
- $\Rightarrow$ trajectoire constituée de $P_1, P_2, \dots, P_{K+1}$,
- tous les facteurs n'ont varié qu'une seule fois,
- N trajectoires $\Rightarrow N(K+1)$ simulations.

Exemple de plan de Morris standard

- $K = 2$ facteurs discrétisés en $Q = 7$ niveaux,
- $\delta = 1/6$, $N = 5$ trajectoires de 3 points,
- la flèche indique l'ordre des points d'une trajectoire.



Indices

- **effet élémentaire** :

- soit une trajectoire T , ($T = 1, N$)
- variation de la sortie Y associée à une variation du facteur i :

$$\Delta_T^{(i)} Y = \frac{G(.,., \mathbf{x}^{(i)} + \epsilon \delta, ..) - G(.,., \mathbf{x}^{(i)}, ..)}{\epsilon \delta}$$

- **moyenne** des variations de Y associées aux variations du facteur $X^{(i)}$

$$\mu_i = \frac{1}{N} \sum_{T=1}^N \Delta_T^{(i)} Y$$

Exemple (suite)

T	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	Y	$\epsilon^{(1)}$	$\epsilon^{(2)}$	$\Delta_T^{(1)} Y$	$\Delta_T^{(2)} Y$
1	0.57	0.29	8.3				
	0.71	0.29	13.9	+1		(13.9-8.3)/.14 = 40	
	0.71	0.43	6.9		+1		(6.9-13.9)/.14=-50
2	0.57	0.57	-5.7				
	0.57	0.43	1.3		-1		-50
	0.43	0.43	-4.3	-1		40	
3	0.43	0.57	-11.3				
	0.43	0.71	-18.3		+1		50
	0.57	0.71	-12.7	+1		-45.7	
4	0.71	0.71	-7.1				
	0.85	0.71	-1.1	+1		42.85	
	0.85	0.57	5.9		-1		50
5	1.00	0.43	18.5				
	1.00	0.57	11.5		+1		-50
	0.86	0.57	5.9	-1		40	
moy $ \Delta $						41.71	50
e.c.t. Δ						38.7	54.8

Rem1 : la paire de coordonnées qui est modifiée dans une trajectoire est indiquée dans une couleur différente selon le facteur en jeu.

Rem2 : $\delta = 0.14$

- si $\mu_i \simeq 0$: le facteur $X^{(i)}$ n'a pas d'effet ou a une variation périodique,
- la moyenne des **valeurs absolues** des variations est préférable

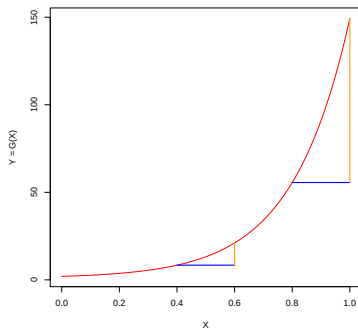
$$\mu^*_i = \frac{1}{N} \sum_{T=1}^N |\Delta_T^{(i)} Y|$$

- **écart type** des variations de Y associées aux variations du facteur $X^{(i)}$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_T (\Delta_T^{(i)} Y - \mu_i)^2}$$

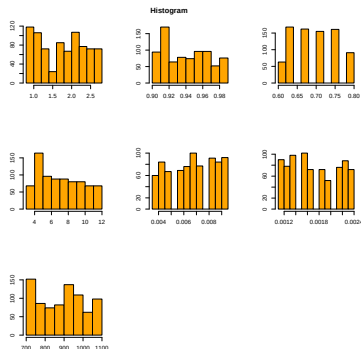
- $\sigma_i \simeq 0$, les quantités $\Delta_T^{(i)} Y$ ne sont pas influencées par les autres facteurs (i.e. pas d'interaction),
- $\sigma_i \gg 0 \Rightarrow$ interaction de X^i **ou** relation non linéaire entre $X^{(i)}$ et Y ,

Une liaison non-linéaire entre la sortie de la FC et un facteur peut expliquer la variabilité de μ^* .



Paramètres des trajectoires

- discrétisation à partir des quantiles de la loi d'échantillonnage,
- si le nombre de niveaux Q **pair** et si $\delta = \frac{Q}{2(Q-1)}$, alors la distribution des coordonnées est proche de celle d'une loi uniforme
- Ex. : distribution empirique des coordonnées :



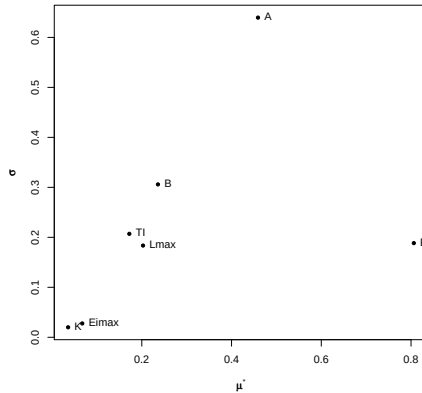
Analyse de Morris sous R :

```
> morris.out = morris(model = wwdm.simule,  
  factors= noms , r = 30,  
  design = list(type = "oat", levels = 6,  
  grid.jump = 6/(2*(6-1))), scale=F,  
  binf = bornes.inf, bsup= bornes.sup)  
> plot(morris.out)
```

ATTENTION : à ce jour (1/06/09), la version v1.1 de fonction morris est erronée pour scale=T.

Graphique de Morris

- $(\mu_j^* \times \sigma_j), j = 1, K$



Stabilité des résultats

- hypothèse d'indépendance des $|\Delta^{(i)} Y|, k = 1, N$
- intervalles de confiance (IC) bilatéraux de probabilité $1 - \alpha$:
 - $\mu_i^* \pm T_{n-1}(1 - \alpha/2)\sigma_{\mu_i^*}/\sqrt{N}$ (T_{n-1} Student)
 - $[\sqrt{\frac{(N-1)}{\chi^2(N-1, \alpha/2)}}\sigma_i, \sqrt{\frac{(N-1)}{\chi^2(N-1, 1-\alpha/2)}}\sigma_i]$
- IC par bootstrap : tirage avec remise des trajectoires.
- règle issue des pratiques : taille d'échantillon $\sim 10 \times K$

Calcul des IC de probabilité 0.95($\alpha = 0.05$) sous R :

```
> IC.mu = apply(abs(x$ee),2, t.test)
> for(i in 1:7) print(IC.mu[[i]]$conf.int)
> sigma = sqrt(apply(x$ee,2,var))
> N = etude.morris$r
> for(i in 1:7) print(c(sigma[i]*(N-1)^.5/qchisq(.975,N-1)^.5,
                        sigma[i]*(N-1)^.5/qchisq(.025,N-1)^.5))
```

μ^*	Eb	Eimax	K	Lmax	A	B	TI
binf	0.73	0.065	0.033	0.19	0.38	0.15	0.15
bsup	0.80	0.08	0.042	0.28	0.64	0.27	0.2
σ							
binf	0.16	0.02	0.021	0.21	0.61	0.25	0.18
bsup	0.22	0.03	0.028	0.27	0.80	0.33	0.24

Plan

1 Introduction

2 ANOVA

- Planification expérimentale
- Plan factoriel Complet équilibré
- Modèle
- Analyse de la variance
- Indices de Sensibilité
- Bilan de l'ANOVA pour l'AS

3 Méthode de Morris

- Généralités
- Plan d'expérience standard
- Plan d'expérience standard
- Indices

4 Plan Fractionnaire

- Bilan

5 Bibliographie

6 A vous d'expérimenter

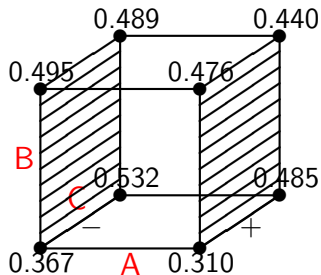
Plan complet

3 facteurs à 2 niveaux $(-1, +1)$, $N = 2^3$ simulations

MU	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	Y
+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	0.367
+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	0.532
+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	0.495
+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	0.489
+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	0.310
+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	0.485
+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	0.476
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0.440

colonne AB = interaction = produit terme à terme des colonnes A et B .
L'interaction d'ordre 3 est utilisée pour estimer la variance d'erreur.

Effets factoriels



Effet de A : demie-différence des Y aux niveaux + et - de A.

Plan fractionnaire

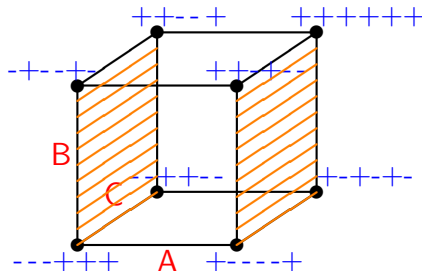
On suppose les facteurs de base A, B et C **sans interactions**.

Construction de 3 nouveaux facteurs.

MU	A	B	C	$D = AB$	$E = AC$	$F = BC$	ABC
+	-	-	-	-	+	+	+
+	-	-	+	+	+	-	-
+	-	+	-	+	-	+	-
+	-	+	+	-	-	-	+
+	+	-	-	+	-	-	+
+	+	-	+	-	-	+	-
+	+	+	-	-	+	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+

- les effets de D et AB ne peuvent être estimés séparément ; ils sont **confondus** ou aliasés.
- 8 simulations au lieu de $2^6 = 64$
- plan $2^{6-3} =$ fraction 1/8 du plan complet 2^6 .

Effets factoriels



$$(- + - - + -) = (A = -1, B = +1, C = -1, D = -1, E = +1, F = -1)$$

Effet : demie-différence des Y aux niveaux $+$ et $-$ d'un facteur.

Modèle d'ANOVA

- notation pour un plan à 3 facteurs à 2 niveaux :

L'espérance du vecteur des sorties Y est la somme des effets $e(.) \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{a,b,c} A^a B^b C^c e(A^a B^b C^c)$$

$a, b, c \in \{0, 1\}$, (ex. $A^1 B^1 C^0 = AB$ vecteur colonne)

- Exemple :

- plan complet

$$\mathbb{E}(Y_{+,+,-}) = \mu + e(A) + e(B) - e(C) + e(AB) - e(AC) - e(BC) - e(ABC)$$

- plan fractionnaire

- $\mathbb{E}(Y_{+,+,-,+,-,-}) =$

$$\mu + e(A) + e(B) - e(C) + e(D) - e(E) - e(F) - e(ABC)$$

Modèle d'ANOVA

- effet $e(A^a B^b C^c) = 1/N < A^a B^b C^c, Y >$ (p.s. de colonnes) avec $a, b, c \in \{0, 1\}$ Ex. : $N = 8$, $e(A^1 B^1 C^0) = e(AB) = 1/8 < AB, Y >$.
- Effet principal de A :

$$e(A) = \frac{1}{2}(\bar{Y}_{+..} - \bar{Y}_{-..}) = \frac{1}{8}[(Y_{+---} + Y_{+- -} + Y_{++-} + Y_{+++}) - (Y_{----} + Y_{-- -} + Y_{-+-} + Y_{-++})] = \frac{1}{8} < A, Y >$$
- Effet d'interaction (plan complet)

$$e(AB) = \frac{1}{2}[e(A|B = +1) - e(A|B = -1)]$$

$$e(AB) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}[Y_{++-} + Y_{+++} - Y_{+- -} - Y_{-++}] - \frac{1}{4}[Y_{+--} + Y_{+- +} - Y_{---} - Y_{-- +}]\right\} = \frac{1}{8} < AB, Y >$$

Résolution d'un plan fractionnaire

- un plan de **résolution** $\mathcal{R}$ permet d'analyser sans confusions :
 - les interactions d'ordre $(\mathcal{R} - 1)/2$ si $\mathcal{R}$ est impair,
 - les interactions d'ordre $(\mathcal{R} - 2)/2$ si $\mathcal{R}$ est pair.
- Ex. : le plan 2^{6-3} , de résolution $\mathcal{R} = 3$, est noté 2_{III}^{6-3} . Il permet d'estimer les effets principaux sans confusions.

Analyse sous R

Génération automatique du plan (fct regular.fraction, SAS proc factex),

arguments de regular.fraction:

```
nb facteurs, nb niveaux, r tq  $N = p^r$  unités, résolution  
> plan = regular.fraction(6,2,3,3)$plan  
> fich = data.frame(A=as.factor(plan[,1]),  
                    B=..., F=as.factor(plan[,6]),  
                    Y=c(.367, .532, .495, .489, .310, .485, .476, .440))  
> fich.aov = aov(Y ~ A + B + C + D + E + F, fich)  
> summary(fich.aov)
```

Analyse sous R

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	0.0037	0.0037	18.49	0.15
B	1	0.0053	0.0053	26.52	0.12
C	1	0.0111	0.0111	55.5	0.085
D	1	0.00016	0.00016	0.8	0.53
E	1	0.00005	0.00005	0.25	0.70
F	1	0.018	0.018	91.203	0.066
Residuals	1	0.0002	0.0002		

Majoration du nombre K de facteurs :

- N de simulations,
- si $\mathcal{R} = III$: $N \geq 1 + K$,
- si $\mathcal{R} = IV$: $N \geq 2K$,
- si $\mathcal{R} = V$: $N \geq 1 + K + K(K - 1)/2$.

Nombre *maximal* κ de facteurs pour un plan :

- de $\mathcal{R} = V$,
- de taille $N = 2^s$,
- donnant des estimateurs de variance minimale,

s	4	5	6	7	8	9
N	16	32	64	128	256	512
κ	5	6	8	11	17	≥ 23

PROBLEME	METHODE
Très nombreux facteurs, sélectionner les plus influents	Plans de screening (résolution III ou <u>IV</u>)
Etudier l'influence simultanée de nombreux facteurs avec peu d'observations, détecter les principales interactions	Plans factoriels à 2 niveaux complets ou fractionnaires, résolution $\geq V$
Etude plus détaillée de facteurs quantitatifs	Plans factoriels 3^n ou 4^n , cf surfaces de réponses

Plan

- 1 Introduction
- 2 ANOVA
 - Planification expérimentale
 - Plan factoriel Complet équilibré
 - Modèle
 - Analyse de la variance
 - Indices de Sensibilité
 - Bilan de l'ANOVA pour l'AS
- 3 Méthode de Morris
 - Généralités
 - Plan d'expérience standard
 - Plan d'expérience standard
 - Indices
- 4 Plan Fractionnaire
 - Bilan
- 5 **Bibliographie**
- 6 A vous d'expérimenter

Bibliographie

- Driesbeke JJ, Fine J., Saporta G. ed. (1997), **Plans d'expérience, applications à l'entreprise**, Editions Tecnip
- Saltelli A. et al. **Sensitivity Analysis**, (2000), Wiley
- Saltelli A. et al. (2008), **Global Sensitivity analysis The primer**, Wiley
- F. Fabre, C. Bruchou, A. Palloix, B. Moury, Key determinants of resistance durability to plant viruses : insights from a model within-and between-host dynamics, Virus Research 141 (2009) 140-149.

Plan

- 1 Introduction
- 2 ANOVA
 - Planification expérimentale
 - Plan factoriel Complet équilibré
 - Modèle
 - Analyse de la variance
 - Indices de Sensibilité
 - Bilan de l'ANOVA pour l'AS
- 3 Méthode de Morris
 - Généralités
 - Plan d'expérience standard
 - Plan d'expérience standard
 - Indices
- 4 Plan Fractionnaire
 - Bilan
- 5 Bibliographie
- 6 A vous d'expérimenter

- Mettez en oeuvre les 3 méthodes sur le modèle wwdm.

Copyrights MEXICO 2009 ©

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

see [http ://www.gnu.org/licenses/fdl.html](http://www.gnu.org/licenses/fdl.html)