



**Formation MEXICO « Solutions à la
Shapley pour l'analyse de sensibilité avec
entrées dépendantes »**

Partie 1

***Indices de sensibilité dans le
contexte linéaire***

Cours 1

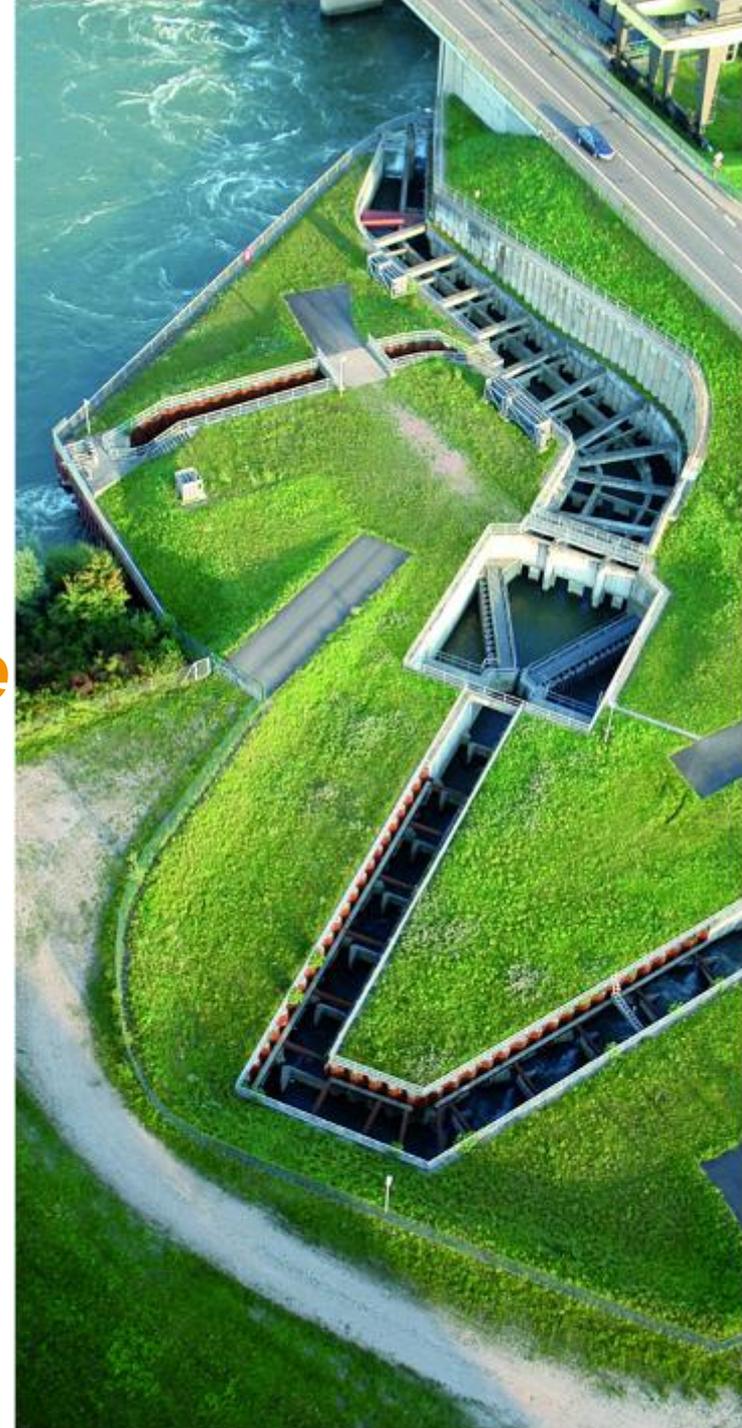
Marouane IL IDRISSEI et Bertrand IOOSS

EDF R&D, Chatou, France

Institut de Mathématiques de Toulouse

SINCLAIR AI Lab Saclay, France

5 mai 2022



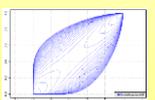
Méthodologie de traitement des incertitudes

Étape C : Propagation des sources d'incertitude



Étape B: Quantification des sources d'incertitudes

Modélisation par des distributions



Étape A : Spécification du problème

Variables d'entrée
Incertaines : X
(de dimension d)

Modèle numérique
(ou processus de mesure)
 $G(X)$

Variables d'intérêt
 $Y = G(X)$

Quantité d'intérêt
Ex: variance, probabilité ..



Étape C' : Analyse de sensibilité, Analyse de robustesse

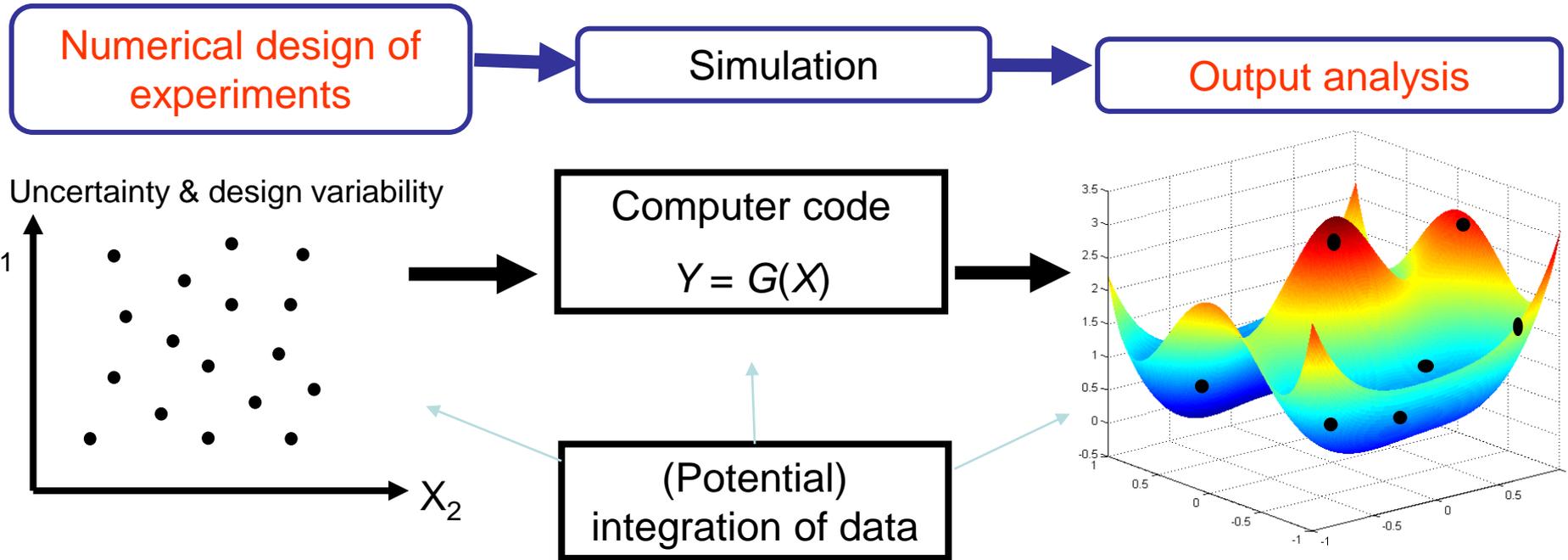


Révision des modèles

Critère de décision
Ex: Probabilité $< 10^{-b}$



Non-intrusive supervision of computer experiments



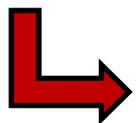
► Keywords:

VVUQ (Validation, Verification and Uncertainty Quantification)

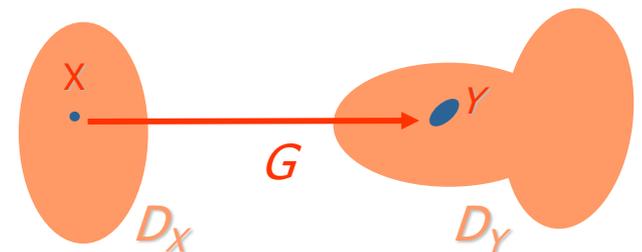
DACE (Design & Analysis of Computer Experiments)

BEPU (Best-estimate Plus Uncertainties)

GSA (Global Sensitivity Analysis)



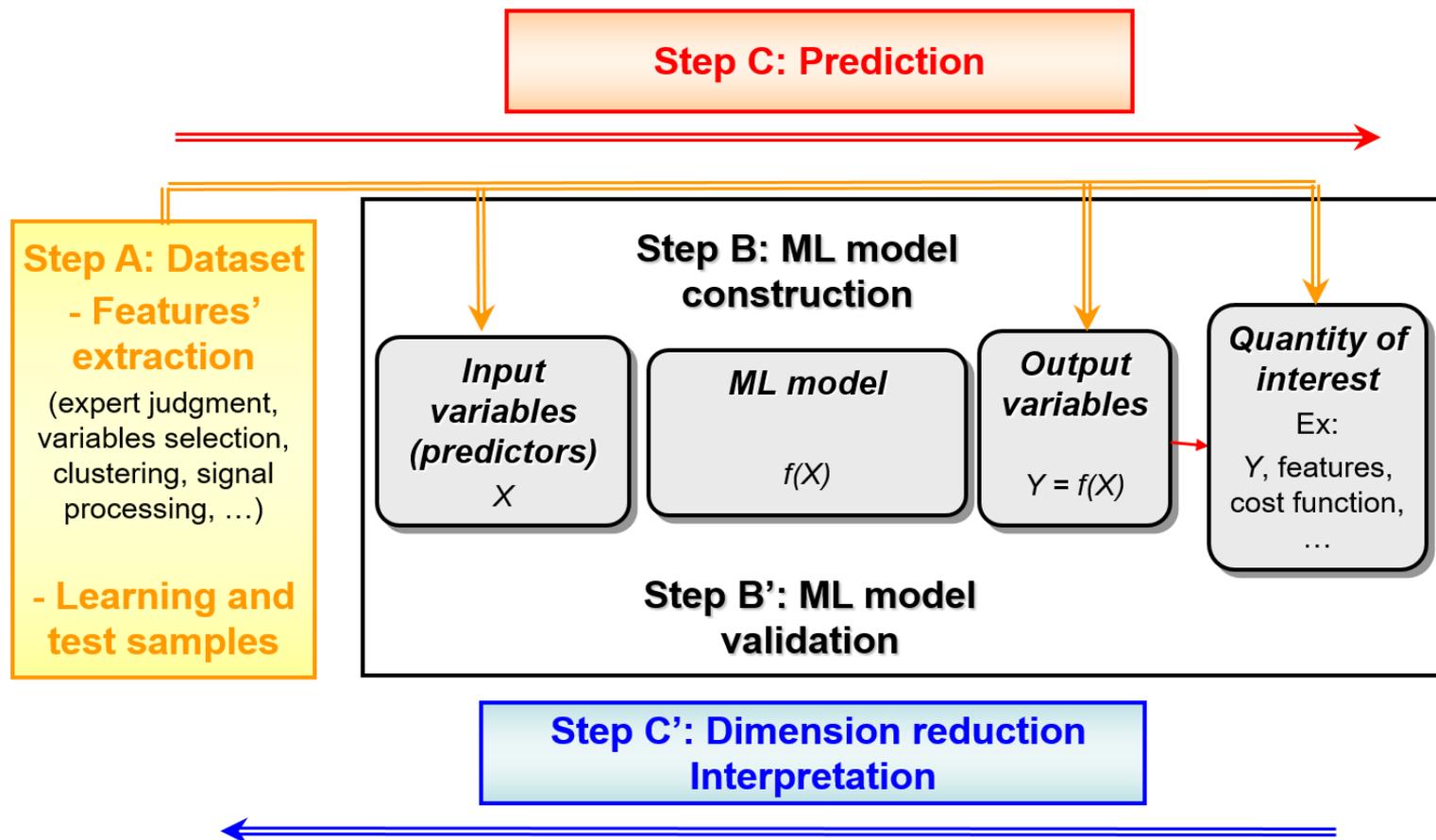
How an input or a group of input apportion into the uncertainty of the output?



Lien fort avec l'interprétabilité en machine learning

Rendre **interprétables** les modèles de **machine learning (ML)** est une nécessité croissante pour les rendre **réellement opérationnelles**

[looss et al., 2022]



La différence entre exploration de modèles numériques et le ML vient de l'acquisition des données, qui sont souvent subies (« given-data ») en ML

Settings of global sensitivity analysis (SA)

1. Understand the behaviour of the model output wrt inputs (direction of variation, interaction, discontinuity, ...)
=> Visualization techniques, Metamodeling, ...

2. Simplify the study (dimension reduction) **Screening**

Determine the non-influential inputs (that can be fixed)

- => Design of experiments, Morris & derivative-based methods
=> Given-data method from machine learning (e.g., HSIC)

3. Prioritize the uncertainty sources to reduce the output uncertainty

Inputs whose uncertainty must be reduced to mostly decrease the **output uncert.**

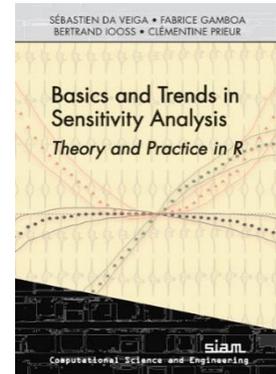
=> Best routes:

Quantitative partitioning

- Sobol' indices: $S_i = \frac{\text{Var}[E(Y|X_i)]}{\text{Var}(Y)}$, $S_{ij} = \frac{\text{Var}[E(Y|X_i X_j)]}{\text{Var}(Y)} - S_i - S_j, \dots$
- Easy interpretation of total Sobol' indices: $S_{Ti} = S_i + \sum_{j \neq i} S_{ij} + \dots$
- Shapley effects in case of dependent inputs

4. Analyze the robustness of the quantity of interest wrt the uncertainty on the input uncertainty models

Robustness analysis

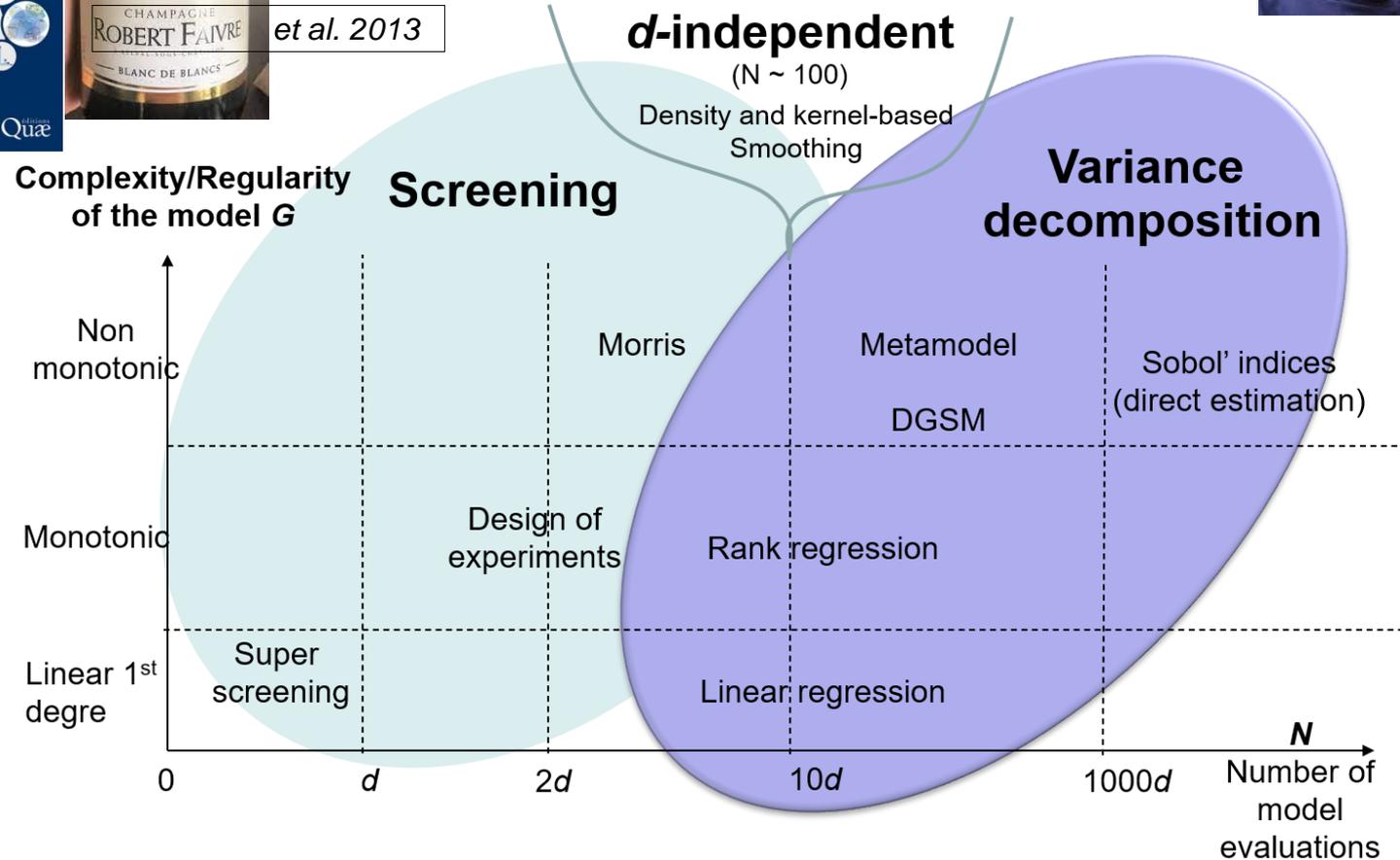


The MEXICO-user point of view!

Global methodology, inspired from the papers of JRC Ispra (Andrea Saltelli, ...), Tilburg Univ. (Jack Kleijnen, ...) and Sandia Nat. Lab. (Jon Helton, ...)



et al. 2013



This kind of classification grids greatly help the end-users to navigate inside the jungle of different methods, each better than the others (wrt authors' opinion), **then to choose the methods most adapted to their specific problem**

Approche locale – Cumul quadratique

Linéarisation de Y :
$$Y = G(\mu) + \sum_{i=1}^d \left. \frac{\partial G}{\partial X_i} \right|_{X=\mu} (X_i - \mu_i)$$

Calcul de la moyenne de Y : $E(Y) = G(\mu)$ où μ est la moyenne de \mathbf{X}

La moyenne de la réponse est égale, au 1^{er} ordre, à la réponse calculée aux valeurs moyennes des entrées

Calcul de la variance de Y :

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= E(Y - E(Y))^2 \\ &= E \left(G(\mu) + \sum_{i=1}^d \left. \frac{\partial G}{\partial X_i} \right|_{X=\mu} (X_i - \mu_i) - G(\mu) \right)^2 \quad \text{où } \mu_i \text{ est la moyenne de } X_i \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left. \frac{\partial G}{\partial X_i} \right|_{X=\mu} \left. \frac{\partial G}{\partial X_j} \right|_{X=\mu} E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \end{aligned}$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left. \frac{\partial G}{\partial X_i} \right|_{X=\mu} \left. \frac{\partial G}{\partial X_j} \right|_{X=\mu} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

où σ_i est l'écart type de X_i
et ρ_{ij} est le coef. de corrélation
entre X_i et X_j

Remarques :

++ Ne nécessite que moyenne et covariance de \mathbf{X}

-- A ne pas utiliser pour les modèles $G(\cdot)$ fortement non linéaires

Cumul quadratique – Variables indépendantes

Calcul de la variance si les X_i sont indépendantes :

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^d \underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial X_i} \Big|_{X=\mu} \right)^2}_{\text{Contribution de chaque variable d'entrée à l'incertitude sur la variable de sortie}} \sigma_i^2 \quad \text{où } \sigma_i^2 \text{ est la variance de } X_i$$

Contribution de chaque variable d'entrée à l'incertitude sur la variable de sortie



- Termes « déterministes » → composants du gradient de $G(\bullet)$
- Termes liés à l'incertitude de la variable X_i (variance)

Indices de sensibilité qui en découlent :

$$\eta_i^2 = \frac{1}{\text{Var}(Y)} \left(\frac{\partial G}{\partial X_i} \Big|_{X=\mu} \right)^2 \sigma_i^2$$

où $\text{Var}(Y)$ est estimée par la formule du cumul quadratique

Cumul quadratique – Variables dépendantes

À partir de la décomposition, un indice (erroné), nommé CVD pour « covariance decomposition », est possible :

$$\eta_i^2 = \frac{1}{\text{Var}(Y)} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial X_i} \Big|_{X=\mu} \right)^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \frac{\partial G}{\partial X_i} \Big|_{X=\mu} \frac{\partial G}{\partial X_j} \Big|_{X=\mu} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \right]$$

Remarques :

++ *Faciles à calculer*

++ *Les η_i^2 somment à la variance de Y*

-- **Peuvent être négatifs**, donc ne peuvent être interprétés comme un pourcentage de contribution à la variance (il n'y a pas de part négative dans un camembert)

Exemple : $Y = X_1 + 2 X_2$ avec $X_1 \sim \mathcal{N}(0;1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0;1)$ et $\rho(X_1, X_2) = -0,9$

On a : $V = \text{Var}(Y) = 1,4$; $\eta_1^2 = -0,8 / V$; $\eta_2^2 = 2,2 / V$

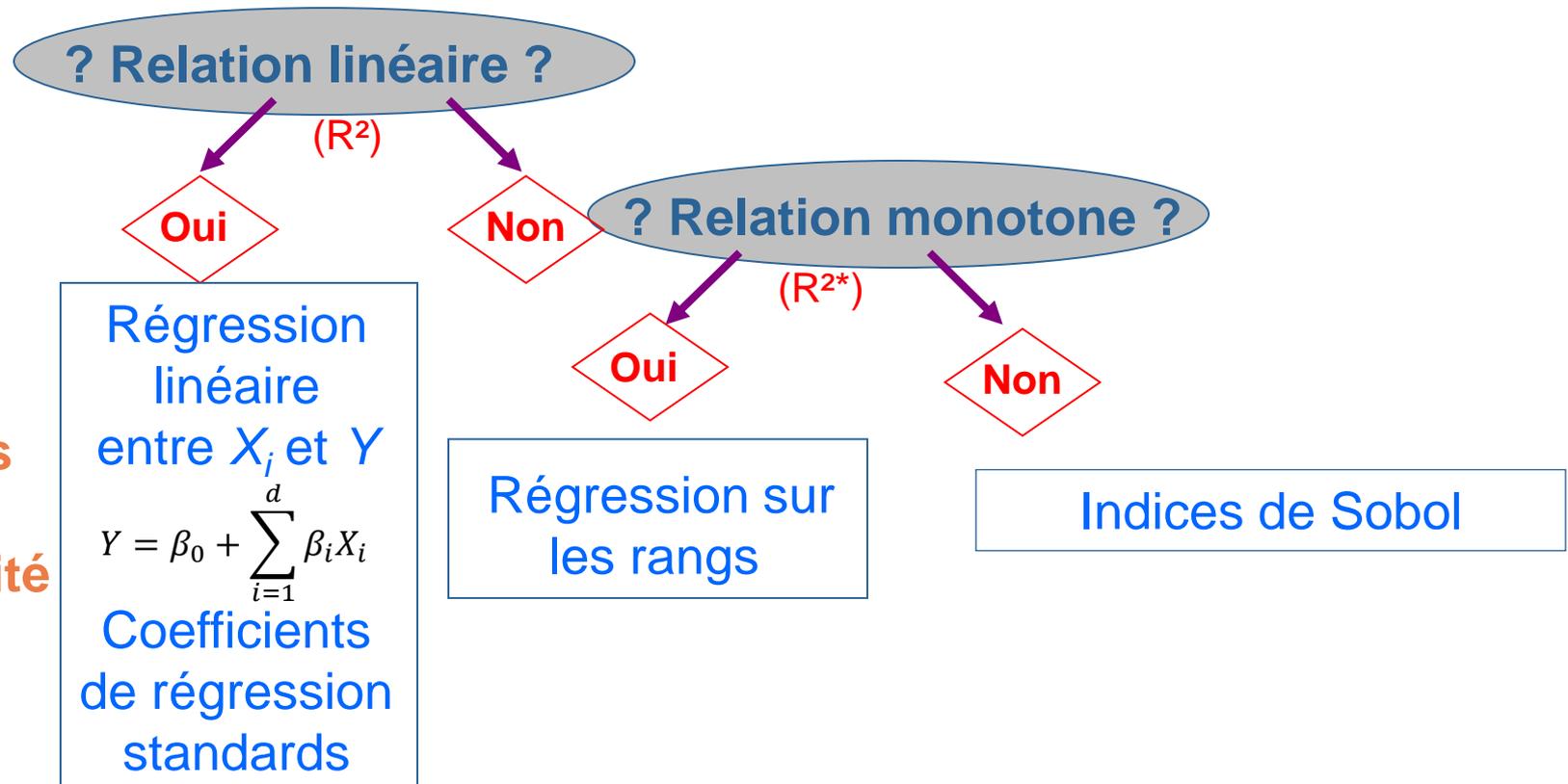
Cas indépendant - Approche globale - Méthodologie

Échantillon (X, Y) de taille $N > d$, de préférence de taille $N \gg d$

Étape préliminaire : visualisation graphique (par ex : scatterplots)

Méthodologie d'analyse de sensibilité quantitative

[Saltelli et al. 00, Helton et al. 06]



$$\text{SRC}(X_i) := \beta_i \sqrt{\frac{\text{Var}(X_i)}{\text{Var}(Y)}}$$

Cas indépendant - Indices de sensibilité

Variables d'entrées $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ indépendantes

Echantillon : N réalisations de (\mathbf{X}, Y)

fit
➔ Modèle linéaire : $Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^d \beta_i X_i$; prédicteur : $\hat{Y}(\mathbf{x}) = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^d \hat{\beta}_i x_i$

◆ L'indice SRC : $\text{SRC}(X_i) := \beta_i \sqrt{\frac{\text{Var}(X_i)}{\text{Var}(Y)}}$

Le signe de β_i donne le sens de variation de Y / X_i

◆ Valider le modèle via les diagnostics de la régression et les critères type R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (\hat{Y}_k - Y_k)^2}{\sum_{k=1}^N (Y_k - \bar{Y})^2} \quad R_{adj}^2 = 1 - |1 - R^2| \left| \frac{n-1}{n-(1+p)} \right|$$

◆ Théoriquement, on a $R^2 = \sum_{i=1}^d \text{SRC}^2(X_i)$, ce qui permet d'interpréter aisément les SRC^2

Mesure d'importance pour modèle linéaire

Échantillon d'apprentissage (par exemple Monte Carlo) : N réalisations de (\mathbf{X}, Y)

Valider le modèle linéaire : $R_{Y(\mathbf{X})}^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (\hat{Y}_k - Y_k)^2}{\sum_{k=1}^N (Y_k - \bar{Y})^2}$; diagnostics (résidus);

Q^2 (R^2 sur base de test ou par validation croisée)

Importance Measure [Johnson & LeBreton 2004]: "The proportionate contribution each variable makes to R^2 , considering both its direct effect and its effect when combined with other variables"

2 propriétés « phares » à respecter pour les indices : 1) somment au R^2 , 2) non négatifs

[cf. Marouane]

[Grömping 2007]

Cas indépendant : « Standard Regression Coef. » $\text{SRC}(X_i) = \beta_i \sqrt{\frac{\text{Var}(X_i)}{\text{Var}(Y)}}$ ($\text{SRC}(X_i)^2 = \eta_i^2$)

Somment au R^2 et si le modèle linéaire est exact : $\text{SRC}(X_i) = \rho(X_i, Y)$ (coef. Pearson)

Cas dépendant :

• Préconisation classique : « Partial Correlation Coef. » $\text{PCC}(X_i) = \rho(X_i - \widehat{X}_{-i}, Y - \widehat{Y}_{-i})$
-- PCC n'est qu'un indice de linéarité entre Y et $X_i \Rightarrow$ **Cet indice ne doit pas être utilisé**

• Semi-PCC $\text{SPCC}(X_i) = \rho(X_i - \widehat{X}_{-i}, Y) = r_{Y, (X_i | \mathbf{X}_{-i})}$

On a : $r_{Y, (X_i | \mathbf{X}_{-i})}^2 = R_{Y(\mathbf{X})}^2 - R_{Y(\mathbf{X}_{-i})}^2$ (pouvoir explicatif additionnel de X_i)

-- SPCC ne somment pas au R^2 et écrasent l'effet d'une variable très corrélée à d'autres

Modèle linéaire et entrées dépendantes

Multicollinéarité, mesurée par Variance Inflation Factor : $VIF(X_j) = 1/[1 - R_{X_j(\mathbf{x}_{-j})}^2]$

⇒ indices LMG:

$$LMG_j = \frac{1}{d!} \sum_{\pi \in \text{permutations of } \{1, \dots, d\}} r_{Y, (X_j | X_\pi)}^2$$

[Lindeman–Merenda–Gold 1980]

$$r_{Y, (X_j | X_\pi)}^2 = R_{Y(X_{v \cup \{j\}})}^2 - R_{Y(X_v)}^2$$

où v sont les indices entrant avant j dans π

Exemple précédent : $Z = X_1 + 2 X_2$ avec $X_1 \sim \mathcal{N}(0;1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0;1)$ et $\rho(X_1, X_2) = -0,9$

On a : $V = \text{Var}(Y) = 1,4$; $LMG_1 = 0,415 / V$; $LMG_2 = 0,985 / V$

$LMG_1 \sim 30\%$; $LMG_2 \sim 70\%$

⇒ PMVD (Proportional Marginal Variance Decomposition):

$$PMVD_j = \frac{\sum_{\pi \in \text{permutations of } \{1, \dots, d\}} L(\pi) r_{Y, (X_j | X_\pi)}^2}{\sum_{\pi} L(\pi)}$$

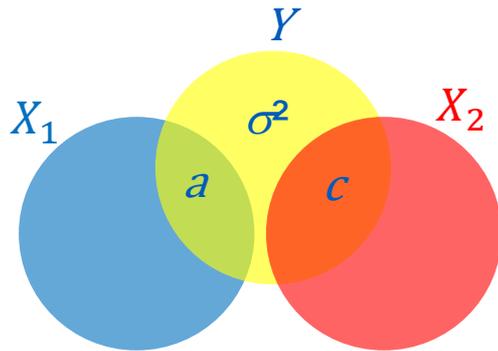
[Feldman 1999;
Grömping 2007;
Il Idrissi et al. 2021]

où $L(\pi)$ prend de grandes valeurs pour les permutations qui ont le bon ordre d'influence décroissante

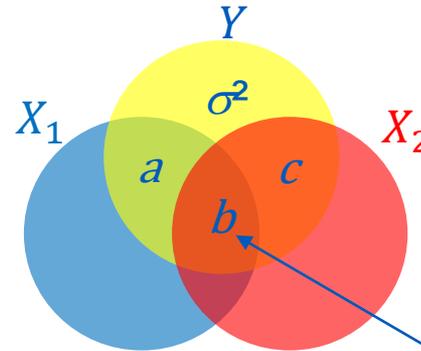
$L(\pi)$ est construite en utilisant un axiome qui dit que si $SPCC_j=0$ alors $PMVD_j=0$

- LMG et PMVD sont basés sur une idée de **partage** des parts de variance dues à la corrélation entre variables (**équitable** pour LMG / **proportionnel** pour PMVD)
- **Leur somme vaut R^2 et ils sont non négatifs**
- PMVD respecte **la propriété d'exclusion** : attribue **un poids nul** à une variable qui a un coef. de régr. nul

Exemple analytique : 2 variables dépendantes



Cas indépendant



Cas dépendant

$$R_{Y(X_1, X_2)}^2 = \frac{a + b + c}{a + b + c + \sigma^2}$$

part due à la corrélation

Indices de sensibilité

Coefficient de corrélation au carré : $r_{Y, X_1}^2 = \frac{a + b}{a + b + c + \sigma^2}$ and $r_{Y, X_2}^2 = \frac{c + b}{a + b + c + \sigma^2}$.

PCC : $r_{(Y, X_1) | X_2}^2 = \frac{a}{a + \sigma^2}$ and $r_{(Y, X_2) | X_1}^2 = \frac{c}{c + \sigma^2}$.

SPCC : $r_{Y, (X_1 | X_2)}^2 = \frac{a}{a + b + c + \sigma^2}$ and $r_{Y, (X_2 | X_1)}^2 = \frac{c}{a + b + c + \sigma^2}$.

LMG : $LMG_1 = (a + b/2) / (a + b + c + \sigma^2)$
 $LMG_2 = (c + b/2) / (a + b + c + \sigma^2)$

PMVD : $PMVD_1 = a + b \times a / (a + c) / (a + b + c + \sigma^2)$
 $PMVD_2 = c + b \times c / (a + c) / (a + b + c + \sigma^2)$

Illustrations sur modèles jouets (1/3)

$$g(X) = X_1^2 + X_2 + X_3$$

$\mathcal{U}[0.5, 1.5]$ $\mathcal{U}[1.5, 4.5]$ $\mathcal{U}[4.5, 13.5]$

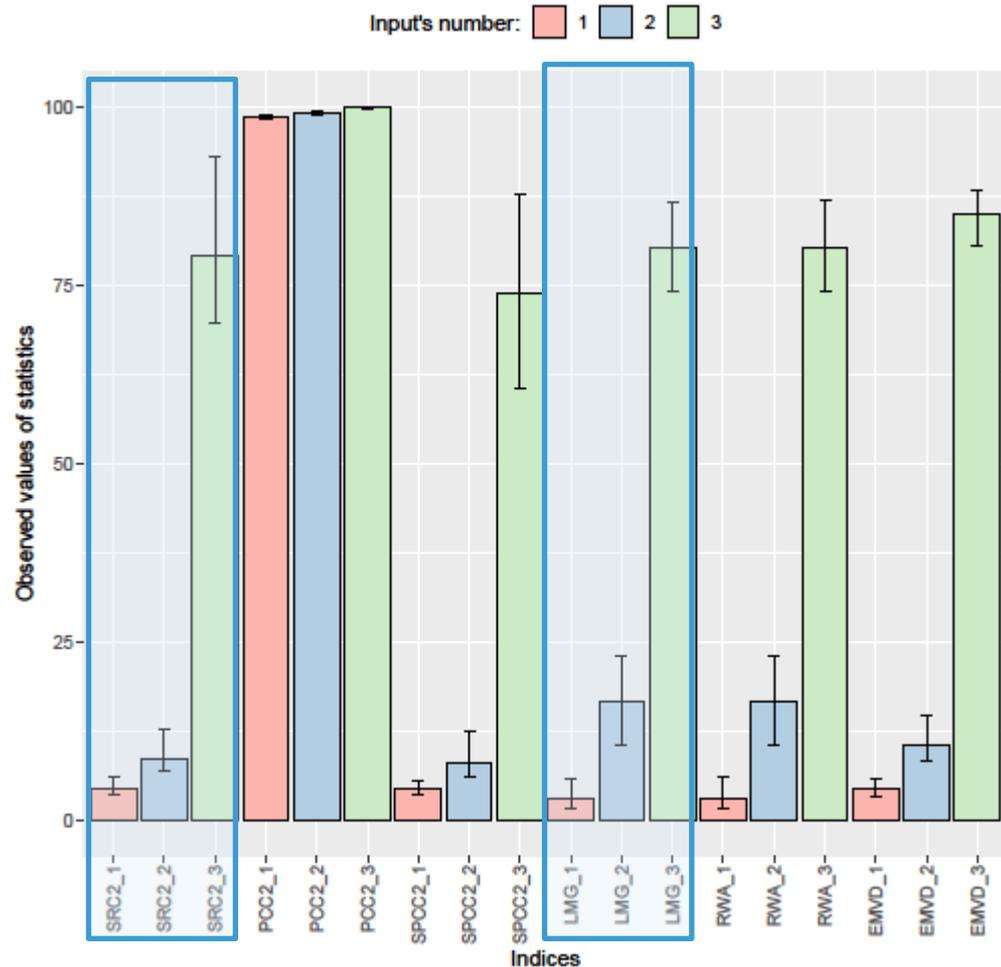
3 variables indépendantes

$$Y = g(X)$$

$$n = 100$$

Régression linéaire

$$\Rightarrow R^2 = Q^2 = 1$$



Illustrations sur modèles jouets (2/3)

$$g(X) = X_1^2 + X_2 + X_3$$

$\mathcal{U}[0.5, 1.5]$ $\mathcal{U}[1.5, 4.5]$ $\mathcal{U}[4.5, 13.5]$

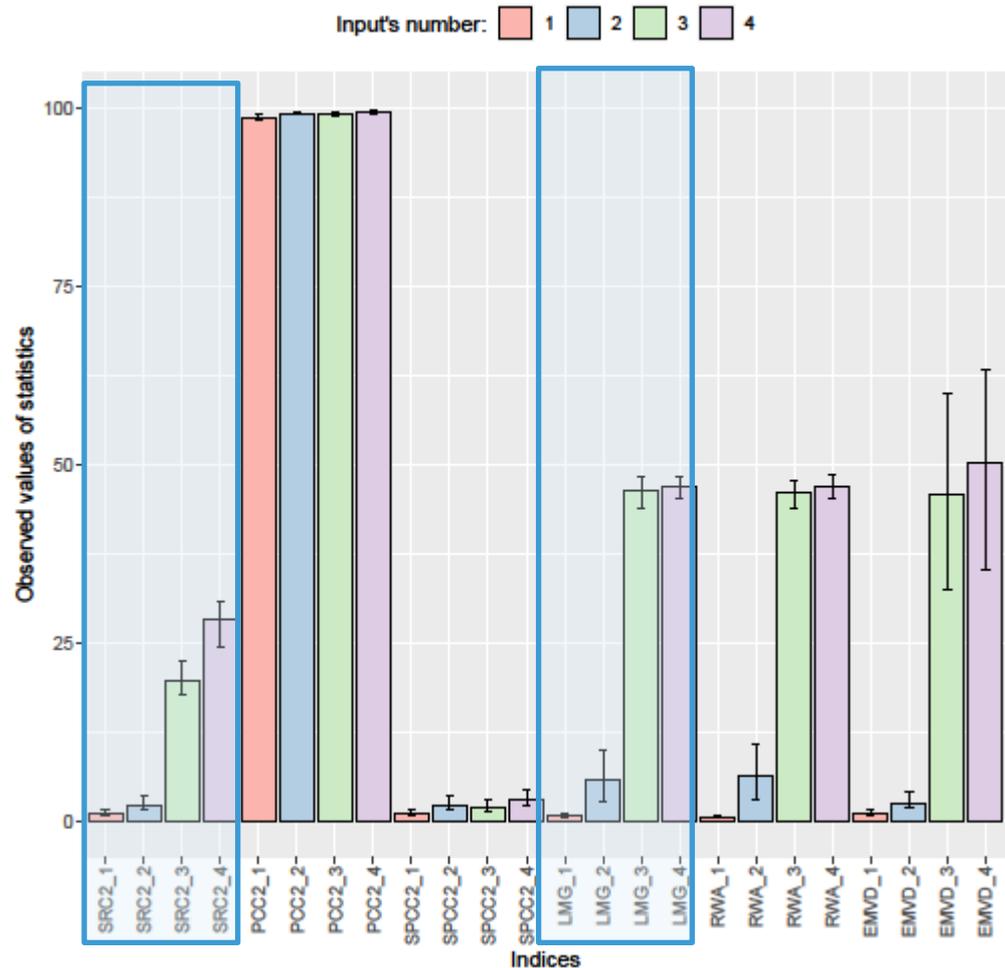
4 variables dont 2 corrélées

$$Y = g(X) + X_4$$

avec $X_4 = X_3 + \eta$
 $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$n = 100$

Régression linéaire
 $\Rightarrow R^2 = Q^2 = 1$



Illustrations sur modèles jouets (3/3)

$$g(X) = X_1 + \eta$$

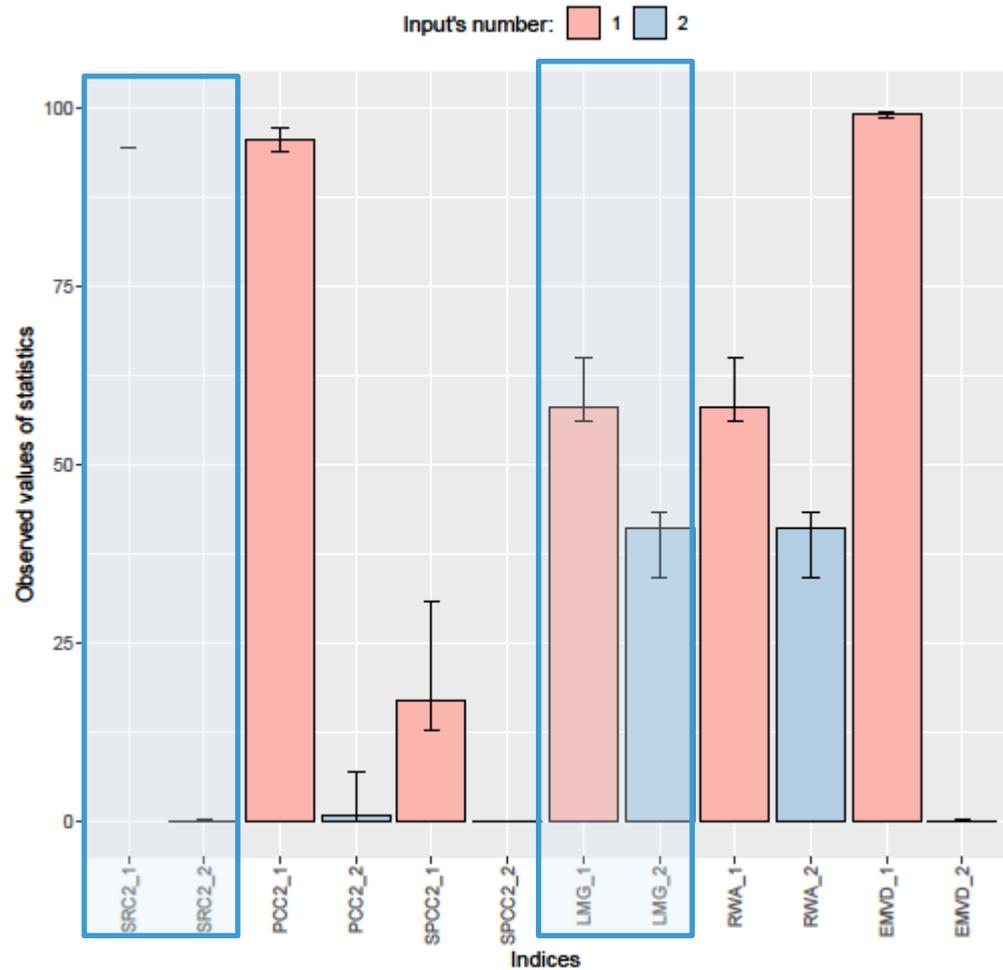
$\eta \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$

2 variables très corrélées
(dont une « fausse » variable)

$$Y = g(X)$$

$$n = 100$$

Régression linéaire
 $\Rightarrow R^2 = Q^2 = 0,99$



Autre exemple analytique

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

$$X \sim \mathcal{N}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathbb{V}(Y) = \beta_1^2 \sigma_1^2 + \beta_2^2 \sigma_2^2 + 2\beta_1 \beta_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho$$

$$\text{LMG}_1 = \frac{1}{\mathbb{V}(Y)} \left(\beta_1^2 \sigma_1^2 + \beta_1 \beta_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho + \frac{\rho^2}{2} (\beta_2^2 \sigma_2^2 - \beta_1^2 \sigma_1^2) \right)$$

$$\text{LMG}_2 = \frac{1}{\mathbb{V}(Y)} \left(\beta_2^2 \sigma_2^2 + \beta_1 \beta_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho + \frac{\rho^2}{2} (\beta_1^2 \sigma_1^2 - \beta_2^2 \sigma_2^2) \right)$$

$$\text{PMVD}_1 = \frac{\beta_1^2 \sigma_1^2}{\beta_1^2 \sigma_1^2 + \beta_2^2 \sigma_2^2}$$

$$\text{PMVD}_2 = \frac{\beta_2^2 \sigma_2^2}{\beta_1^2 \sigma_1^2 + \beta_2^2 \sigma_2^2}$$

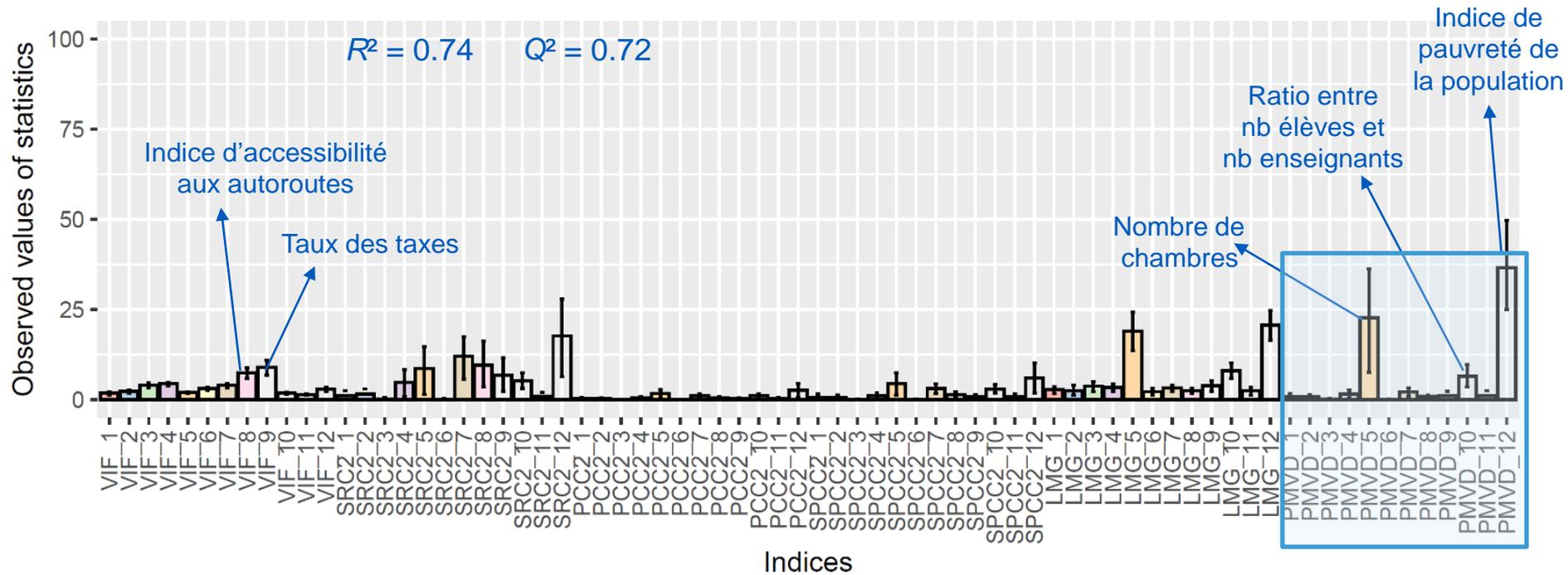
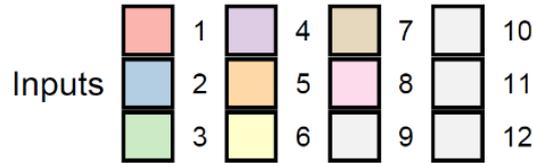
Share of the part of the variance due to correlation

Does not depend on ρ

At the limit $\rho^2 = 1$, we have $\text{LMG}_1 = \text{LMG}_2$

Exemple sur jeu de données public (2/3)

“*Boston housing dataset*” (prix des maisons à Boston en 1970)



Autres entrées : pollution, criminalité, distance aux centres d'emplois, ...

Exemple sur jeu de données public (3/3)

$$R^2 = 0.74 \quad Q^2 = 0.72$$

VIF = Mesure de multicollinéarité

PMVD

E-MVD

	Input	n°	VIF	SRC ²	PCC ²	SPCC ²	LMG	RWA	E-MVD
	crim	1	1.79	1.09	2.28	0.61	2.79	3.29	0.72
	zn	2	2.30	1.51	2.46	0.66	2.50	2.81	0.67
	indus	3	3.95	0.10	0.10	0.03	3.74	3.66	0.06
	nox	4	4.39	4.79	4.02	1.09	3.31	3.68	1.54
nombre de chambres	rm	5	1.93	8.59	14.57	4.45	19.01	20.59	22.71
	age	6	3.09	0.01	0.09	0.00	2.20	2.70	0.00
	dis	7	3.95	12.02	10.44	3.04	3.17	1.86	2.18
accessibilité autoroutes	rad	8	7.40	9.56	4.72	1.29	2.46	2.10	0.83
taux des taxes	tax	9	8.88	6.73	2.82	0.76	3.87	3.64	1.07
nb élèves / nb enseignants	ptratio	10	1.78	5.15	9.97	2.89	7.93	8.70	6.48
	b	11	1.34	0.92	2.56	0.69	2.37	2.97	1.12
Indice de pauvreté de la population	lstat	12	2.93	17.64	18.76	6.02	20.59	17.92	36.56
	Sum		43.74	68.10	72.70	21.51	73.93	73.93	73.93

Autres entrées : pollution, criminalité, distance aux centres d'emplois, ...

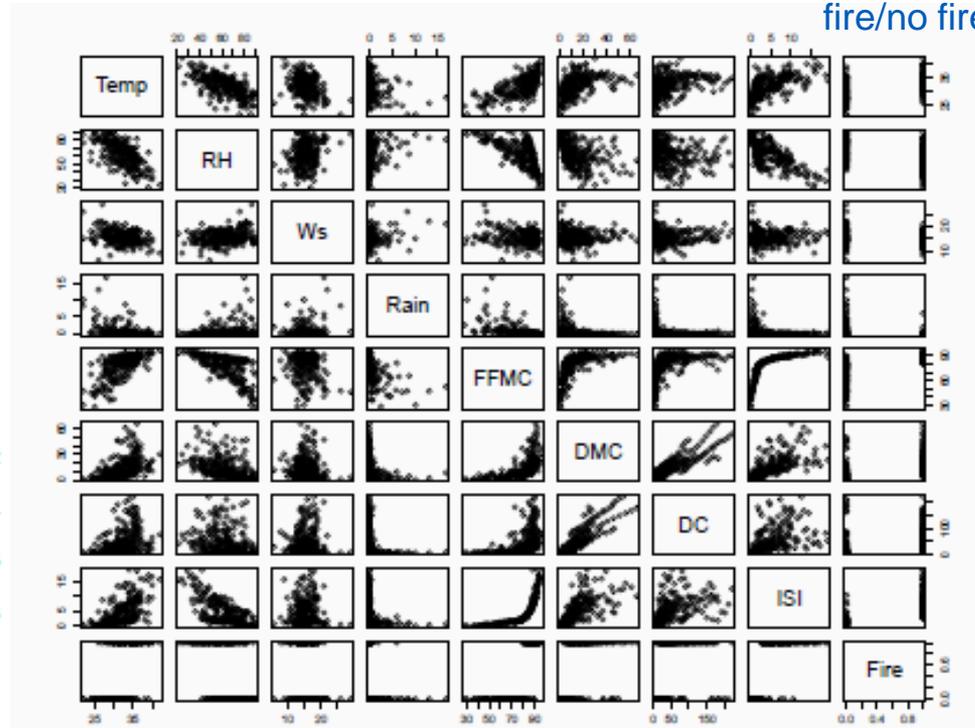
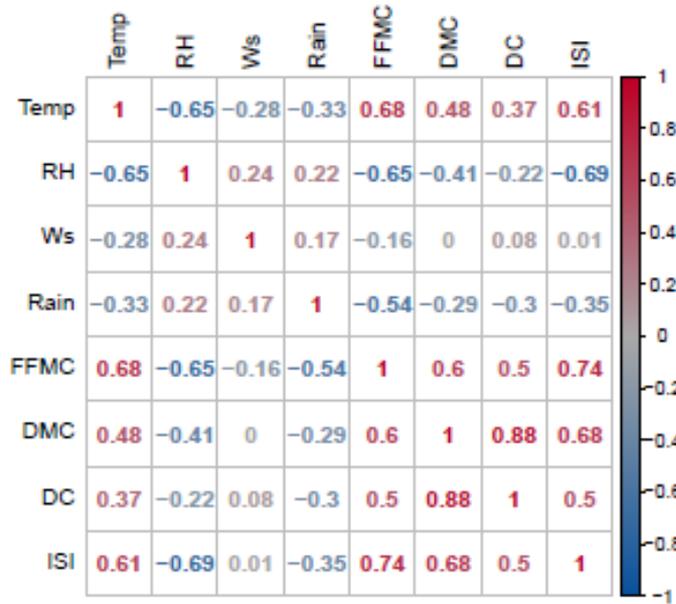
À interpréter bien sûr au regard de la causalité potentielle entre variables

Remarque : - effet de seuillage brutal de la mesure PMVD

Real dataset: Algerian forest fires ($n = 244$)

Binary output:
fire/no fire

[Abid & Izeboudjen 2020]



Linear logistic model: $R^2 = 0.803$ and $Q^2 = 0.79$

moisture
condition

initial
spread

collinearity index

Covariates	Temp	RH	Ws	Rain	FFMC	DMC	DC	ISI	Total
VIF	1.36	1.90	1.72	1.44	7.08	8.04	6.24	5.04	-
LMG (%)	4.5	3.7	0.4	5.5	33.3	6.2	3.2	23.5	80.3
PMVD (%)	0.4	0	0	0.7	69.7	6.4	0	3.1	80.3

Conclusion on SA settings: **quantitative partitioning (LMG) and screening (PMVD)**

Calcul des LMG et PMVD

- Les indices LMG et PMVD peuvent être calculés grâce à une combinatoire relativement complexe

cf. implémentation optimisée dans package R « sensitivity » ; [cf. Marouane] ; inspirée de l'implémentation dans package R « relaimpo » [Grömping 2006]

- Problème majeur : indices trop coûteux à évaluer quand $d > 10$**

=> Alternatives à l'étude pour la grande dimension :

- Si \mathbf{X} est (multi-)gaussien, on obtient une formule analytique (lourde) pour les LMG :

$$\text{LMG}_i = \frac{1}{d \text{Var}(Y)} \sum_{u \subseteq \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}} \binom{d-1}{|u|} \left[E(\text{Var}(Y | \mathbf{X}_u)) - E(\text{Var}(Y | \mathbf{X}_{u \cup \{i\}})) \right]$$

Les termes $E(\text{Var}(Y | \mathbf{X}_u))$ font intervenir des blocs de la matrice de covariance de \mathbf{X}

[Broto et al. 2019]

- Les indices de Johnson ou RWA (relative weight allocations), basés sur une simple SVD (et donc surmontant le fléau de la dimension), **approchent bien les LMG**

[Johnson and LeBreton 2004; Clouvel 2019]

Une solution pour la montée en dimension: Johnson indices = Relative Weight (RW) allocation

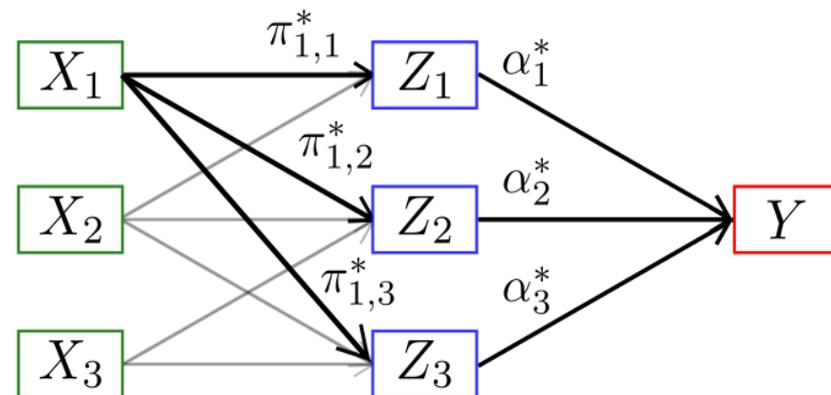
Step 1: Minimal transformation to an orthogonal problem via singular value decomposition (SVD) of the correlated inputs \mathbf{X}

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{Z}\Pi \\ \mathbf{Z}^t\mathbf{Z} = I \\ \mathbf{Z} = \underset{W}{\arg \min}(\mathbf{X} - W)^t(\mathbf{X} - W) \end{cases} \Rightarrow \text{orthogonal inputs } \mathbf{Z} \text{ but maximally related to } \mathbf{X}$$

Step 2: Regression of each X_i on Z_j ($j=1, \dots, d$)

Step 3: Regression of Y on Z_j ($j=1, \dots, d$)

$$RW_i = \sum_{j=1}^d \pi_{i,j}^{*2} \alpha_j^{*2}$$



$$\sum_{i=1}^d RW_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \alpha_j^{*2} \pi_{ij}^{*2} = \sum_{j=1}^d \alpha_j^{*2} \left(\sum_{i=1}^d \pi_{ij}^{*2} \right) = \text{Var}(\hat{Y})$$

Empirical observation: RW approximates LMG at a greatly reduced budget!

Exemple sur jeu de données public (3/3)

$$R^2 = 0.74 \quad Q^2 = 0.72$$

VIF = Mesure de multicollinéarité

	Input	n°	VIF	SRC ²	PCC ²	SPCC ²	LMG	RWA	PMVD E-MVD
	crim	1	1.79	1.09	2.28	0.61	2.79	3.29	0.72
	zn	2	2.30	1.51	2.46	0.66	2.50	2.81	0.67
	indus	3	3.95	0.10	0.10	0.03	3.74	3.66	0.06
	nox	4	4.39	4.79	4.02	1.09	3.31	3.68	1.54
nombre de chambres	rm	5	1.93	8.59	14.57	4.45	19.01	20.59	22.71
	age	6	3.09	0.01	0.09	0.00	2.20	2.70	0.00
	dis	7	3.95	12.02	10.44	3.04	3.17	1.86	2.18
accessibilité autoroutes	rad	8	7.40	9.56	4.72	1.29	2.46	2.10	0.83
taux des taxes	tax	9	8.88	6.73	2.82	0.76	3.87	3.64	1.07
nb élèves / nb enseignants	ptratio	10	1.78	5.15	9.97	2.89	7.93	8.70	6.48
	b	11	1.34	0.92	2.56	0.69	2.37	2.97	1.12
Indice de pauvreté de la population	lstat	12	2.93	17.64	18.76	6.02	20.59	17.92	36.56
	Sum		43.74	68.10	72.70	21.51	73.93	73.93	73.93

Autres entrées : pollution, criminalité, distance aux centres d'emplois, ...

Merci – Quelques références

- Abid, F., and N. Izeboudjen. 2020. Predicting Forest Fire in Algeria Using Data Mining Techniques: Case Study of the Decision Tree Algorithm." In *Advanced Intelligent Systems for Sustainable Development*, 363{370. Springer International Publishing
- B. Broto, F. Bachoc, M. Depecker, and J.-M. Martinez. Sensitivity indices for independent groups of variables. *Mathematics and Computers in Simulation*, 163:19–31, 2019
- L. Clouvel, *Uncertainty quantification of the fast flux calculation for a PWR vessel*, Thèse de l'Université Paris-Saclay, 2019
- S. Da Veiga, F. Gamboa, B. Iooss, and C. Prieur. Basics and trends in sensitivity analysis. *Theory and practice in R*. SIAM, 2021
- R. Faivre, B. Iooss, S. Mahévas, D. Makowski, and H. Monod, editors. *Analyse de sensibilité et exploration de modèles*. Éditions Quaé, 2013
- B. E. Feldman et al., The proportional value of a cooperative game, Manuscript. Chicago: Scudder Kemper Investments, 1999
- U. Grömping, Relative importance for linear regression in R: the Package relaimpo. *JSS*, 2006
- U. Grömping. Estimators of relative importance in linear regression based on variance decomposition. *The American Statistician*, 61(2):139–147, 2007
- J.C. Helton, J.D. Johnson, C.J. Salaberry, and C.B. Storlie. Survey of sampling-based methods for uncertainty and sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 91:1175–1209, 2006
- M. Il Idrissi, V. Chabridon and B. Iooss, Developments and applications of Shapley effects to reliability-oriented sensitivity analysis with correlated inputs, *Environmental Modelling & Software*, 143, 105115, 2021
- M. Il Idrissi, B. Iooss and V. Chabridon, Mesures d'importance relative par décompositions de la performance de modèles de régression, *52èmes JdS*, pp 497-502, Nice, France, Juin 2021
- B. Iooss, S. Da Veiga, A. Janon and G. Pujol, R sensitivity package v1.27.0, 2021
- B. Iooss, R. Kennet and P. Secchi, Different views of interpretability, In: *Interpretability for Industry 4.0: Statistical and Machine Learning Approaches*, A. Lepore, B. Palumbo and J-M. Poggi (Eds), Preprint, 2022
- Johnson, J. and LeBreton, J. History and use of relative importance indices in organizational research, *ORM*, 2004
- R.H. Lindeman, P.F. Merenda and R.Z. Gold, *Introduction to bivariate and multivariate analysis*, Scott Foresman / Company, 1980
- A. Saltelli, K. Chan, and E.M. Scott, editors. *Sensitivity Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2000