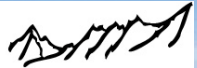




ÉCOLE DE PHYSIQUE
des HOUCHES



Plans d'expérience pour le criblage et l'analyse de sensibilité

Hervé Monod

École de Physique des Houches

9 Avril 2013

Plan

- 1 Introduction
- 2 Plans factoriels pour facteurs discrets
- 3 Échantillonnage d'une variable continue
- 4 Plans d'expériences multifactoriels sur domaines continus
 - Plans space-filling
 - Plans uniformes, suites à discrédance faible
 - Plans à haute résolution
 - Propriétés de réduction de la variance
- 5 Compléments
- 6 Exemple d'une méthode spécifique: la méthode de Morris
- 7 Références

Échantillonnage et plan d'expérience

échantillonnage = **sélection d'une partie dans un tout**

lorsqu'on ne peut pas saisir un événement dans son ensemble, il faut effectuer des mesures en nombre fini, afin de représenter l'événement.

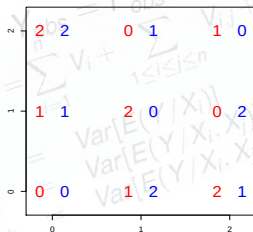
plan d'expérience = suite ordonnée d'essais d'une expérimentation, obtenue en contrôlant un ou plusieurs paramètres d'entrée pour obtenir des résultats sur un phénomène avec une bonne économie (nombre d'essais le plus faible possible, par exemple).

Expérimentation numérique:

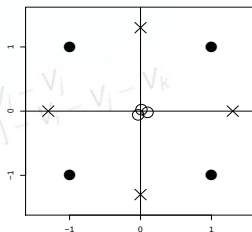
- sélection d'individus $\implies$ échantillonnage
- conditions contrôlées $\implies$ expérimentation

Historique

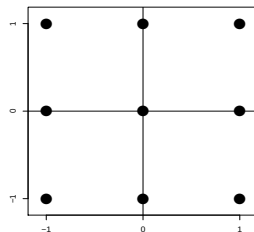
Plan factoriel



Surf. de réponse

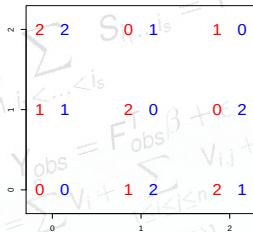


Plan optimal

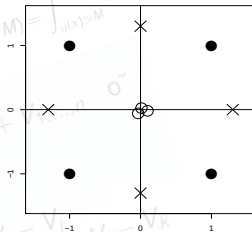


Historique

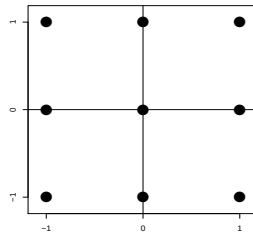
Plan factoriel



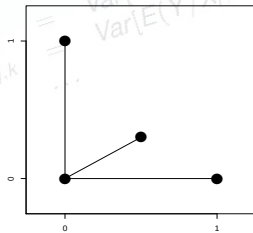
Surf. de réponse



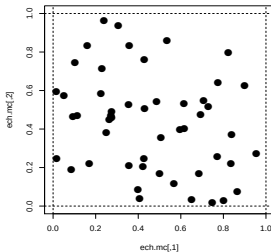
Plan optimal



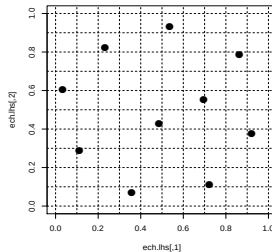
Plan OAT



Monte Carlo



LHS



Historique

Des influences multiples

- méthodes d'échantillonnage en statistique (simple, stratifié, spatial, ordonné, ...)
- plans d'expérience (plans factoriels; plans pour surfaces de réponse; plan optimal, robuste, séquentiel, adaptatif...)
- analyse numérique
 - intégration
 - optimisation
 - génération de nombres aléatoires

Un domaine en soi

- analyse de sensibilité globale: Fast (1973), Sobol (1990)
- expérimentation numérique: hypercube latin (Mc Kay et al., 1979), Sacks et al. (1989), Owen (1992)

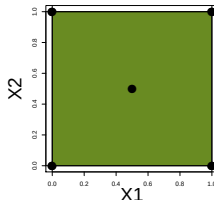
Notations et vocabulaire

- $X_1, \dots, X_d$: variables d'entrée = facteurs du plan d'expériences
= paramètres étudiés de l'analyse de sensibilité
- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$: jeu d'entrées, traitement, échantillon [élémentaire]
- Ω : domaine du plan ($\Rightarrow \mathbf{x} \in \Omega$)
- $\mathcal{P} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \Omega$: plan d'expérience, échantillon
- $y = \mathcal{M}(\mathbf{x})$ ou Y : variable réponse = sortie du modèle pour les entrées $\mathbf{x}$
- $\mathbf{Y} = \mathcal{M}(\mathbf{x})$: variables d'entrée-sortie vues comme aléatoires

Exemple:

$$\Omega = [0, 1]^2$$

$$\mathcal{P} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0.5, 0.5)\}$$



Plan

- 1 Introduction
- 2 Plans factoriels pour facteurs discrets
- 3 Échantillonnage d'une variable continue
- 4 Plans d'expériences multifactoriels sur domaines continus
 - Plans space-filling
 - Plans uniformes, suites à discrédance faible
 - Plans à haute résolution
 - Propriétés de réduction de la variance
- 5 Compléments
- 6 Exemple d'une méthode spécifique: la méthode de Morris
- 7 Références

Exemple 1: 4 facteurs à 2 niveaux en $N = 8$ unités

⇒ sélectionner 8 parmi $2^4 = 16$ traitements

Unit	A	B	C	$D = ABC$
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Conséquences: relations d'alias

1	=	ABCD
A	=	BCD
B	=	ACD
C	=	ABD
D	=	ABC
AB	=	CD
AC	=	BD
AD	=	BC

interactions d'ordre ≥ 3 nulles $\Rightarrow$ effets principaux estimables

Conséquences: modélisation

Dans le modèle:

$$Y = 1 + A + B + C + D + A.B + A.C + A.D + B.C + B.D + C.D + \varepsilon$$

Tous les effets principaux sont estimables.

Matrice clé

Unit	A	B	C	<i>D = ABC</i>
000	0	0	0	0
001	0	0	1	1
010	0	1	0	1
011	0	1	1	0
100	1	0	0	1
101	1	0	1	0
110	1	1	0	0
111	1	1	1	1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fraction de résolution 4 $\equiv$ *Tableau orthogonal de force 3*

Exemple 2 plus difficile: plan fortement fractionnaire

Objectif: analyse de sensibilité d'un modèle d'épidémiologie animale

Facteurs = paramètres du modèle

- 19 facteurs: 12 à 4 niveaux, 7 à 2 niveaux
- Modèle à ajuster: effets principaux + interactions entre 2 facteurs
- Budget: $N \leq 5000$ simulations

Plan factoriel complet: $4^{12} \times 2^7 = 2^{31}$ combinaisons ($\approx 2.15 \cdot 10^9$)

Solution: fraction avec $N = 2^{12} = 4096$

(Courcoul, Monod *et al.*, 2011, J. Theor. Biol.)

Exemple 2 plus difficile: plan fortement fractionnaire

Objectif: analyse de sensibilité d'un modèle d'épidémiologie animale

Facteurs = paramètres du modèle

- 19 facteurs: 12 à 4 niveaux, 7 à 2 niveaux
- Modèle à ajuster: effets principaux + interactions entre 2 facteurs
- Budget: $N \leq 5000$ simulations

Plan factoriel complet: $4^{12} \times 2^7 = 2^{31}$ combinaisons ($\approx 2.15 \cdot 10^9$)

Solution: fraction avec $N = 2^{12} = 4096$

(Courcoul, Monod *et al.*, 2011, J. Theor. Biol.)

Solution:

```
> frac.plan@design
```

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4096	4	4	4	4	1	4	2	2	2	2	4	3	2	1	1	2	1	1	1

Property: factoriel complet pour tout sous-ensemble de 4 facteurs
 ⇒ **Tableau orthogonal** de force 4 (≡ résolution 5)

Plans fractionnaires sous R

Packages FrF2, planor

Utilisation la plus simple:

```
plan <- regular.design(factors=LETTERS[1:19],  
                       nlevels=c(rep(4,12),rep(2,7)),  
                       resolution=5,  
                       nunits=4096,  
                       base=~A+B+C+D+E+F)
```

(55 secondes)

Plan

- 1 Introduction
- 2 Plans factoriels pour facteurs discrets
- 3 Échantillonnage d'une variable continue
- 4 Plans d'expériences multifactoriels sur domaines continus
 - Plans space-filling
 - Plans uniformes, suites à discrédance faible
 - Plans à haute résolution
 - Propriétés de réduction de la variance
- 5 Compléments
- 6 Exemple d'une méthode spécifique: la méthode de Morris
- 7 Références

Tirage uniforme de N valeurs dans $\Omega = [0, 1]$

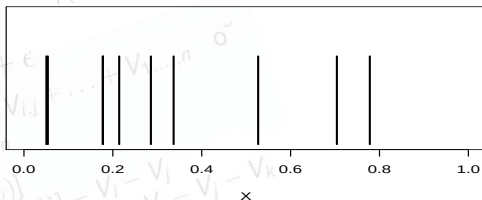
Plusieurs enjeux possibles

- obtenir des tirages indépendants (Monte Carlo)
- couvrir le mieux possible l'intervalle (space-filling)
- couvrir l'intervalle en restant non biaisé (stratification)
- privilégier certaines zones (échant. d'importance)
- estimer les paramètres d'un modèle (plan optimal)

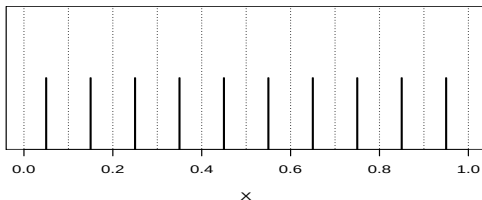
⇒ plusieurs approches sont nécessaires

Tirages uniformes de N valeurs dans $[0, 1]$

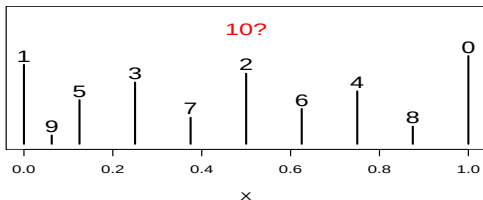
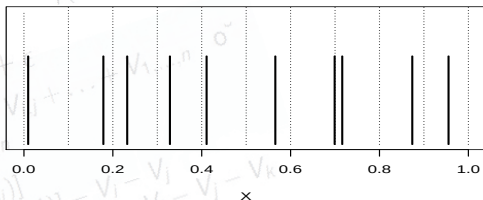
Monte Carlo



systematique



Tirages uniformes de N valeurs dans $[0, 1]$



Échantillonnage séquentiel

Exemple: séquence de van der Corput (1935). En base b :

$$\begin{aligned} 6 &= 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 & i &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l(i) b^l \\ \phi_2(6) &= 1 \times \frac{1}{2^3} + 1 \times \frac{1}{2^2} + 0 \times \frac{1}{2^1} & \phi_b(i) &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l(i) b^{-l-1} \end{aligned}$$

i	$i-1$	base 2	inversée	$\phi_2(i)$	$\phi_3(i)?$
1	0	0	.0	0	
2	1	1	.1	1/2	
3	2	10	.01	1/4	
4	3	11	.11	3/4	
5	4	100	.001	1/8	
6	5	101	.101	5/8	
7	6	110	.011	3/8	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

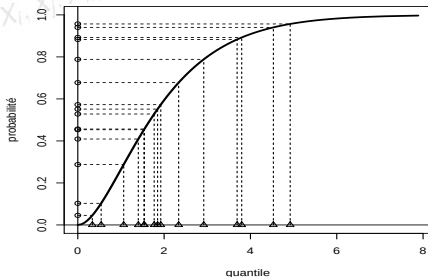
Package **randtoolbox**: `c(1, halton(9))`

Généralisation à d'autres lois de probabilité

Pour échantillonner dans une loi non uniforme, on utilise la fonction quantile (inverse de la fonction de répartition)

- échantillon $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ (loi uniforme) $\rightarrow$ probabilités
- quantiles $F_{\text{Loicible}}^{-1}(x^{(k)}) \rightarrow$ échantillon $z^{(1)}, \dots, z^{(N)}$ (loi cible)

Fonction de répartition de la loi Gamma(2,1)

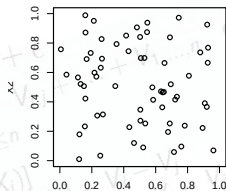


Plan

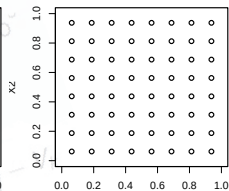
- 1 Introduction
- 2 Plans factoriels pour facteurs discrets
- 3 Échantillonnage d'une variable continue
- 4 Plans d'expériences multifactoriels sur domaines continus
 - Plans space-filling
 - Plans uniformes, suites à discrédance faible
 - Plans à haute résolution
 - Propriétés de réduction de la variance
- 5 Compléments
- 6 Exemple d'une méthode spécifique: la méthode de Morris
- 7 Références

Approches de base

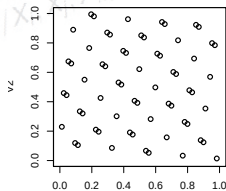
Monte Carlo



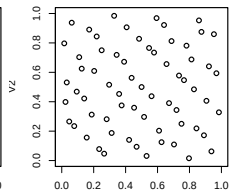
Grille régulière



Lattice



Quasi-Monte Carlo



Critères de remplissage de l'espace

Trois grands types de critères

- basés sur la distance entre points (plans minimax, maximin)
- basés sur la discrépance (plans uniformes)
- résolution (fractions, tableaux orthogonaux, (t, m, s) -nets)

Méthodes de construction

- méthodes algébriques:

- recherche de propriétés combinatoires
- construction déterministe
- brouillage, randomisation

- méthodes algorithmiques:

- optimisation d'un critère
- en général, algos stochastiques d'échange

Plan

- 1 Introduction
- 2 Plans factoriels pour facteurs discrets
- 3 Échantillonnage d'une variable continue
- 4 Plans d'expériences multifactoriels sur domaines continus
 - Plans space-filling
 - Plans uniformes, suites à discrédance faible
 - Plans à haute résolution
 - Propriétés de réduction de la variance
- 5 Compléments
- 6 Exemple d'une méthode spécifique: la méthode de Morris
- 7 Références

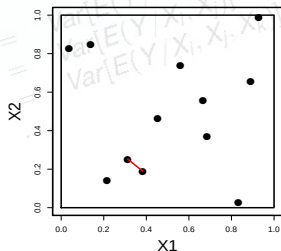
Critères basés sur la distance entre points

- plan maximin: maximise

$$\min_{x, x' \in \mathcal{P}} (\text{dist}(x, x'))$$

- plan minimax: minimise

$$\max_{x \in \Omega} \left(\min_{x' \in \mathcal{P}} (\text{dist}(x, x')) \right)$$



cf. **package DiceDesign:**

fonctions mindist, phiP,
maximinSA, maximinESE,
straussDesign, etc.

Critères basés sur la distance entre points

Distances généralisées:

$$\rho_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left[\sum_i |x_i - x'_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$p = 2$: distance euclidienne ; $p = 1$: distance rectangulaire

Plan

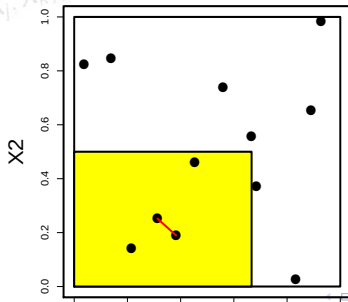
- 1 Introduction
- 2 Plans factoriels pour facteurs discrets
- 3 Échantillonnage d'une variable continue
- 4 Plans d'expériences multifactoriels sur domaines continus
 - Plans space-filling
 - Plans uniformes, suites à discrédance faible
 - Plans à haute résolution
 - Propriétés de réduction de la variance
- 5 Compléments
- 6 Exemple d'une méthode spécifique: la méthode de Morris
- 7 Références

Critères de discrédance

Déviati3n par rapport à la loi uniforme = Discrédance

$$D^*(S) = \sup_{A \subset [0,1[} |F(A) - \hat{F}(A)|.$$

avec $F(A)$ volume de A (proba sous $U([0, 1])$) et $\hat{F}(A)$ proportion de l'échantillon dans A



Critères de discrédance

Dans le cas unidimensionnel:

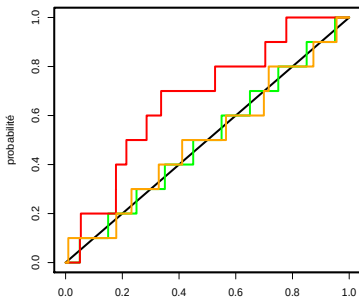
$$D^*(S) = \sup_{[a,b] \subset [0,1]} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{\{a \leq x_k \leq b\}} - |b - a| \right|.$$

On a:

$$D^*(S_{\text{sys}}) = 1/2N$$

$$D^*(S_{\text{MC}}) = ?$$

$$D^*(S_{\text{reg}}) \leq 1/N$$



Discrépances

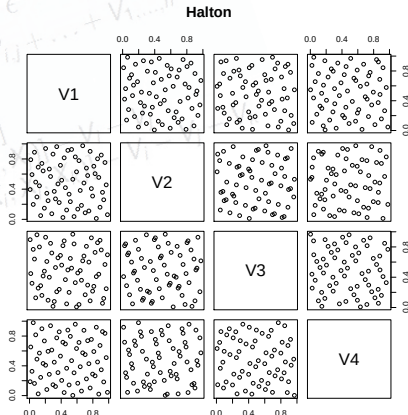
star-discrepancy; discrèpances L1, L2;
prise en compte des projections sur les sous-espaces de petite dimension

Suites de quasi-Monte Carlo

Généralisations en d dimensions de la séquence de van der Corput

Enjeu: bien remplir les sous-espaces de dimension > 1

Exemple:



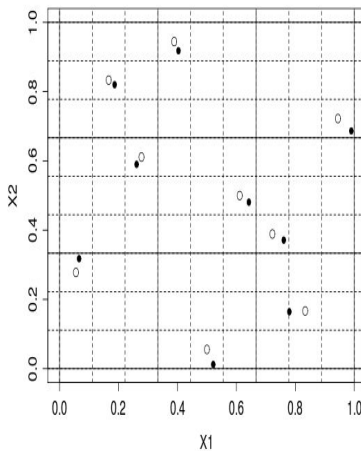
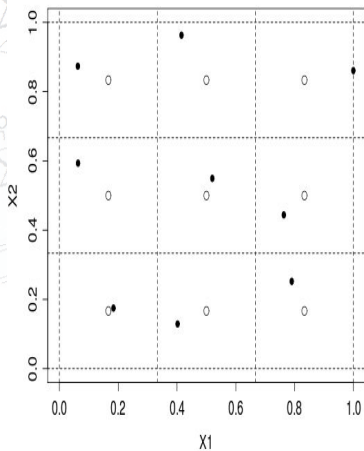
Plan

- 1 Introduction
- 2 Plans factoriels pour facteurs discrets
- 3 Échantillonnage d'une variable continue
- 4 Plans d'expériences multifactoriels sur domaines continus
 - Plans space-filling
 - Plans uniformes, suites à discrédance faible
 - Plans à haute résolution
 - Propriétés de réduction de la variance
- 5 Compléments
- 6 Exemple d'une méthode spécifique: la méthode de Morris
- 7 Références

Principe général:

- assurer l'équirépartition dans des sous-espaces (hyper-rectangles en général) de volume donnés
- généralisent la propriété du LHS à des sous-espaces de dimension > 1

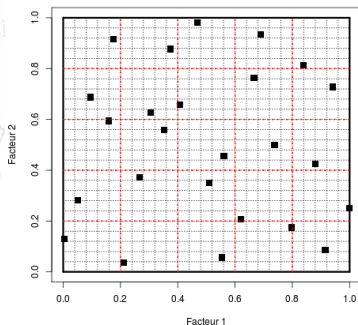
Résolution



“OA-based Latin hypercube” (Tang, 1993)

(t, m, s) -net

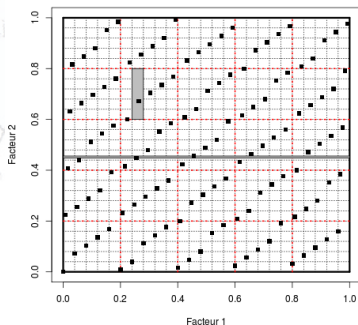
- 5 entrées: domaine $= [0, 1]^5$
- 25 essais



(Niederreiter, 1992; Owen, 1995)

(t, m, s) -net

- 5 entrées: domaine $= [0, 1]^5$
- 25 essais



(Sobol, 1990; Niederreiter, 1992)

- 1 Introduction
- 2 Plans factoriels pour facteurs discrets
- 3 Échantillonnage d'une variable continue
- 4 Plans d'expériences multifactoriels sur domaines continus
 - Plans space-filling
 - Plans uniformes, suites à discrédance faible
 - Plans à haute résolution
 - Propriétés de réduction de la variance
- 5 Compléments
- 6 Exemple d'une méthode spécifique: la méthode de Morris
- 7 Références

Intégration numérique

Problème: intégrer/estimer la moyenne d'une fonction g de Y

$$I = \int_{\Omega} \mathcal{M}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv \mathbb{E}_{\text{Unif}(\Omega)} Y$$

Méthode de Monte Carlo:

- échantillonnage dans Ω uniforme et indépendant
- estimateur: $\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N \mathcal{M}(\mathbf{x}_j)$

Propriété

Théorème central limite $\Rightarrow \text{Var}(\hat{I}) = V/N$

Intégration numérique

Propriétés de l'estimateur de Monte Carlo:

- + converge à une vitesse indépendante de la dimension d
- + *en grande dimension*, plus efficace que les méthodes de quadrature classiques
- + insensible aux non linéarités ou discontinuités de $\mathcal{M}$
- nécessite un bon générateur de nombres pseudo-aléatoires
- ne donne qu'un encadrement probabiliste de $\hat{I}$
- n'exploite pas les régularités (fréquentes) de $\mathcal{M}$

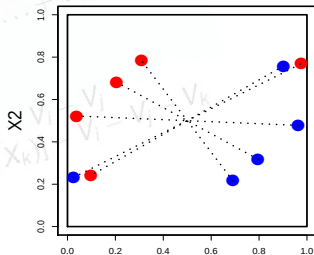
Comment faire mieux ?

- + **exploiter les régularités de $\mathcal{M}$**

⇒ Techniques de réduction de la variance

Réduction de la variance (1)

Exemple: échantillons antithétiques



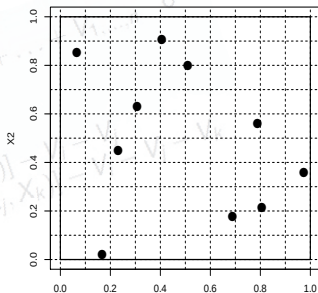
Propriété (cf. Lemieux)

Plus efficace que le Monte Carlo si $\mathcal{M}$ est borné et monotone en chaque X_i

$$\text{cf. } \text{Var}\left(\frac{\bar{Z}_A + \bar{Z}_B}{2}\right) = \frac{\sigma^2}{N} + \frac{1}{N} \text{Cov}(\bar{Z}_A, \bar{Z}_B)$$

Réduction de la variance (2)

Exemple: hypercube latin



Propriété (McKay *et al.*)

$\text{Var}(\hat{I}_{\text{LHS}}) \leq \text{Var}(\hat{I}_{\text{MC}})$ si $\mathcal{M}$ est borné et monotone en chaque X_i

cf. (Stein, 1987) $\text{Var}(\hat{I}_{\text{LHS}}) = \frac{\sigma^2}{N} - \frac{c}{N} + o(\frac{1}{N})$

Réduction de la variance (3)

Exemple: suites à discrétion faible

Propriété (Koksma et Hlawka)

$|\hat{I} - I| \leq D^*(\mathcal{P}) V_{KH}(\mathcal{M})$ avec

- $V_{KH}(\mathcal{M})$ la variance de $\mathcal{M}$ au sens de Koksma-Hlawka
- $D^*(\mathcal{P})$ la discrétion de la suite

cf. $V_{KH}(\mathcal{M}) = \int \left| \frac{\partial^d \mathcal{M}}{\partial x^d} \right| + \dots$

Plan

- 1 Introduction
- 2 Plans factoriels pour facteurs discrets
- 3 Échantillonnage d'une variable continue
- 4 Plans d'expériences multifactoriels sur domaines continus
 - Plans space-filling
 - Plans uniformes, suites à discrédance faible
 - Plans à haute résolution
 - Propriétés de réduction de la variance
- 5 Compléments
- 6 Exemple d'une méthode spécifique: la méthode de Morris
- 7 Références

Généralisation à des lois quelconques

Quand on ne connaît pas la fonction de répartition:

- expression sous forme de probabilités conditionnelles
- algorithmes d'acceptation-rejet
- + échantillonnage d'importance

Conditions à prendre en compte

- temps calcul $\Rightarrow$ taille de l'échantillon
- organisation des calculs $\Rightarrow$ plan fixe/plan adaptatif
- objectifs $\Rightarrow$ remplir l'espace/privilegier des zones
- connaissances *a priori* $\Rightarrow$
 - hypothèses de départ
 - plan systématique/éch. aléatoire

Échantillonnage séquentiel

L'échantillonnage peut tenir compte de l'organisation des calculs:

- calcul en série: utiliser les résultats au temps t pour piloter les suivants
 - *échantillonnage séquentiel*: ajuster le nombre de simulations à la précision voulue
 - *échantillonnage adaptatif*: affiner la zone de recherche
- calcul distribué: factorisation, gestion du temps calcul, échantillonnage par blocs
- calcul numérique à différents niveaux de précision: double échantillonnage

Autres thèmes développés dans la littérature

- plans one-at-a-time
- structures complexes des facteurs
 - corrélations [cf. Iman et Conover; copules]
 - relations de hiérarchie
 - lois de probabilité non explicites
- méthodes adaptatives

Plan

- 1 Introduction
- 2 Plans factoriels pour facteurs discrets
- 3 Échantillonnage d'une variable continue
- 4 Plans d'expériences multifactoriels sur domaines continus
 - Plans space-filling
 - Plans uniformes, suites à discrédance faible
 - Plans à haute résolution
 - Propriétés de réduction de la variance
- 5 Compléments
- 6 Exemple d'une méthode spécifique: la méthode de Morris
- 7 Références

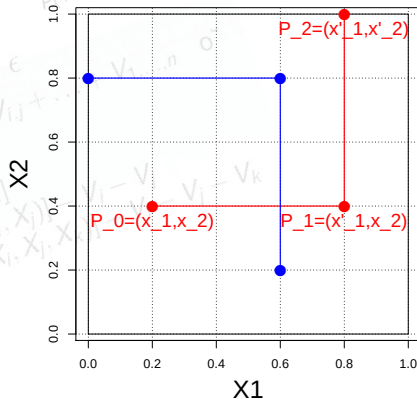
Méthode de Morris: rappel

Méthode de Morris:

- méthode d'analyse de sensibilité globale
- objectifs principaux
 - identifier les facteurs influents
 - classer les facteurs selon leur influence
- implémentée sous R, package `sensitivity`

Méthode de Morris: plan d'expérience

Discrétisation et trajectoires dans le plan (X_1, X_2):



Paramètres sur la figure: $r = 2$, $q = 6$, $\delta = \frac{q}{2(q-1)} = 0.6$

Méthode de Morris: plan d'expérience

Domaine d'intérêt: $\Omega = [0, 1]^d$

Échantillonnage $\Rightarrow N = r \times (d + 1)$ simulations

- grille régulière: $D = \{0, \frac{1}{q-1}, \frac{2}{q-1}, \dots, 1\}^d$
- “un facteur à la fois” (OAT) et pas de longueur fixe $\pm \delta$

$$(x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, \mathbf{x}_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_d^{(k)}) \longrightarrow (x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, \mathbf{x}_i'^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_d^{(k)})$$

- r trajectoires $P_0^{(k)}, \dots, P_d^{(k)}$ où $X_1, \dots, X_d$ varient successivement
- randomisation: pour chaque trajectoire
 - 1 point de départ $P_0^{(k)}$ tiré au hasard dans la grille
 - 2 ordre de modification des entrées $X_j = \text{permutation aléatoire } \pi(j)$
- optimisation *space-filling* des trajectoires

Méthode de Morris: analyse (exemple)

Simul	Traj.	i	X_1	X_2	X_3	...	X_{20}	Y	Δ_i
[1,]			0.6	0.2	0.4	...	0.6	-36	
[2,]	1	1	0.0	0.2	0.4	...	0.6	-98	-62
[3,]	1	2	0.0	0.8	0.4	...	0.6	-22	-74
[4,]	1	3	0.0	0.8	1.0	...	0.6	-7	-15
...	.	.					.	.	.
...	.	.					.	.	.
[84,]	4	.	0.0	1.0	1.0	...	0.6	51	.

Méthode de Morris: analyse

Mesures d'importance du facteur $X_i, i = 1, \dots, d$:

- effet **élémentaire**: $\Delta_i^{(k)} = \frac{\mathcal{M}(P_{\pi_k(i-1)}^{(k)}) - \mathcal{M}(P_{\pi_k(i)}^{(k)})}{\delta}$

- effet **moyen**: $\mu_i = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \Delta_i^{(k)}$

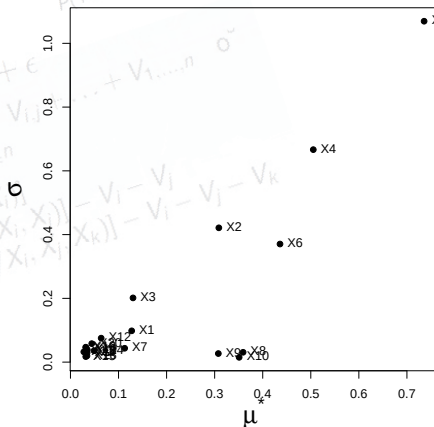
- effet **absolu moyen**: $\mu_i^* = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r |\Delta_i^{(k)}|$

- **écart-type** des effets élémentaires: $\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{r-1} \sum_{k=1}^r (\Delta_i^{(k)} - \mu_i)^2}$

avec k : numéro de trajectoire, r nombre de trajectoires, π_k permutation de l'ordre des facteurs pour la trajectoire k

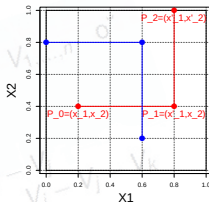
Méthode de Morris: interprétation graphique

Représentation de l'importance des facteurs dans le plan (μ^*, σ) :



```
x <- morris(model = morris.fun, factors = 20, r = 4,  
  design = list(type = "oat", levels = 5, grid.jump = 3))  
plot(x)
```

Méthode de Morris: discussion



- plan et analyse étroitement liés. Existe-t-il des principes plus génériques?
- grille → discrétisation *versus* échantillonnage dans tout $[0, 1]^2$?
- combinaison de systématique et d'aléatoire: intérêt?
- one-at-a-time *versus* simultané
- space-filling $\Rightarrow$ comment?

Plan

- 1 Introduction
- 2 Plans factoriels pour facteurs discrets
- 3 Échantillonnage d'une variable continue
- 4 Plans d'expériences multifactoriels sur domaines continus
 - Plans space-filling
 - Plans uniformes, suites à discrédance faible
 - Plans à haute résolution
 - Propriétés de réduction de la variance
- 5 Compléments
- 6 Exemple d'une méthode spécifique: la méthode de Morris
- 7 Références

Bibliographie I



K-T. Fang, R. Li, and A. Sudjianto.

Design and modeling for computer experiments.

Chapman et Hall-CRC, 2006.



J. Franco.

Planification d'expériences numériques en phase exploratoire pour la simulation des phénomènes complexes.

Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2008.



A. Jourdan.

Planification d'expériences numériques.

Revue MODULAD, 33:63–73, 2005.



A. Kobilinsky.

Les plans factoriels.

In J.J. Dreesbeke, J. Fine, and G. Saporta, editors, *Plans d'Expériences: Applications à l'Entreprise*, chapter 3, pages 69–209. Technip, Paris, 1997.

Bibliographie II



D. Kurowicka and R. Cooke.

Uncertainty analysis with high dimensional dependence modelling.
Wiley, 2006.



C. Lemieux.

Monte Carlo and quasi-Monte Carlo sampling.
Springer, 2009.



M. D. McKay, R. J. Beckman, and W. J. Conover.

A comparison of three methods for selecting values of input variables.
Technometrics, 21(21):239–245, 1979.



H. Niederreiter.

Random number generation and quasi-Monte Carlo methods, volume 63
of *SIAM CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*.
SIAM, Philadelphia, 1992.

Bibliographie III



C.P. Robert and G. Casella.

Introducing Monte Carlo methods with R.

Use R! Springer, 2010.



J. Sacks, W.J. Welch, T.J. Mitchell, and H.P. Wynn.

Design and analysis of computer experiments.

Statistical Science, 4:409–435, 1989.



A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, and S. Tarantola.

Global Sensitivity Analysis: The Primer.

Wiley, New York, 2008.



T. Santner, B. Williams, and W. Notz.

The design and analysis of computer experiments.

Springer, 2003.

Bibliographie IV



J-Y. Tissot.

Sur la décomposition ANOVA et l'estimation des indices de Sobol'.
Application à un modèle d'écosystème marin.
PhD thesis, Université de Grenoble, 2012.