

THÉORIE DES JEUX COOPÉRATIFS ET IMPORTANCE RELATIVE

INDICES LMG ET PMVD POUR LA RÉGRESSION LINÉAIRE

¹EDF Lab Chatou - Département PRISME

²Institut de Mathématiques de Toulouse

³SINCLAIR AI Lab

Journées thématiques MEXICO

Jeudi 4 Mai 2022

Objectif : Quantifier l'**importance des covariables** dans un modèle de régression linéaire, en leur **allouant des part de performance**.

La **théorie des jeux coopératifs** offre un cadre prometteur, permettant de construire des **allocations** particulière, même lorsque les **covariables sont corrélées**.

En particulier, les **valeurs de Shapley** sont “à la mode” pour la quantification d'importance... Mais sont-elles toujours **pertinentes** ?

Objectif : Quantifier l'**importance des covariables** dans un modèle de régression linéaire, en leur **allouant des part de performance**.

La **théorie des jeux coopératifs** offre un cadre prometteur, permettant de construire des **allocations** particulière, même lorsque les **covariables sont corrélées**.

En particulier, les **valeurs de Shapley** sont “à la mode” pour la quantification d'importance... Mais sont-elles toujours **pertinentes** ? **Problématiques :**

- Comment utiliser les jeux coopératifs pour produire des **mesures d'importance** ?
- Sur quelle base peut-on **comparer** deux allocations ?

1. Jeux coopératifs statistiques et allocations
2. Mesures d'importance relatives
3. Estimation

1. Jeux coopératifs statistiques et allocations

1.1 Jeux coopératifs et allocations de Weber

1.2 Jeux coopératifs statistiques et allocation du R^2

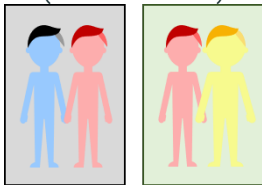
2. Mesures d'importance relatives

3. Estimation

Jeux coopératifs

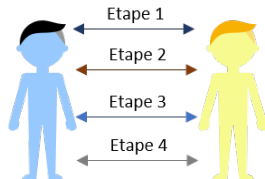
Deux domaines d'étude de la théorie des jeux :

Jeux coopératifs (combinatoires)



Modélisation de l'issue d'un jeu lorsque les joueurs s'organisent en coalitions différentes.

Jeux non-coopératifs (procéduraux)



Modélisation des décisions offertes aux joueurs de manière procédurale.

Les jeux coopératifs ne traitent pas exclusivement de coopération (et inversement).

Jeux coopératifs

La théorie des jeux coopératifs peut être résumée comme étant “**l’art de partager un gâteau**”.



Étant donné un **ensemble de joueurs** $D = \{1, \dots, d\}$, qui produisent une **quantité** $v(D)$, la question centrale est :

Comment peut-on partager $v(D)$ parmi les d joueurs ?

Définir une **manière de partager** $v(D)$ (i.e., le gâteau) en d parts revient à définir une **allocation**.

Jeux coopératifs

Formellement, un jeu coopératif est défini par le couple (D, v) , où :

- $D = \{1, \dots, d\}$ dénote l'**ensemble de tous les joueurs** (ou **grande coalition**) ;
- $v : \mathcal{P}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction de valeur** qui associe une quantité à chaque **sous-ensemble de joueurs** (ou **coalitions**).

Une **allocation** est un vecteur $\phi \in \mathbb{R}^d$, dont chaque composante correspond à une certaine part allouée à chaque joueur.

Les allocations sont définies selon des propriétés désirées :

- **Efficacité** : $\sum_{i=1}^n \phi_i = v(D)$ (on partage tout le gâteau, et rien que le gâteau)
- **Positivité** : $\phi_i \geq 0$ (à l'issue du partage, personne ne doit rembourser de parts de gâteau)
- etc.

Allocations de Weber, modèles à ordre aléatoire

Les modèles à ordre aléatoire, (ou ensemble de Weber (1988)) offrent une manière de construire une **classe d'allocations**.

Idée : Considérer que les joueurs interagissent dans un **ordre aléatoire** (i.e., une permutation de D). Chaque joueur reçoit sa **contribution marginale** à la **coalition formée par les joueurs le précédant** dans l'ordre considéré, pondéré par la **vraisemblance de cet ordre**.

Allocations de Weber, modèles à ordre aléatoire

Les modèles à ordre aléatoire, (ou ensemble de Weber (1988)) offrent une manière de construire une **classe d'allocations**.

Idée : Considérer que les joueurs interagissent dans un **ordre aléatoire** (i.e., une permutation de D). Chaque joueur reçoit sa **contribution marginale** à la **coalition formée par les joueurs le précédant** dans l'ordre considéré, pondéré par la **vraisemblance de cet ordre**.

Notons:

- $r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathcal{R}(D)$, une certaine permutation de D ;
- $r(j)$ dénote la position du joueur j dans la permutation r (i.e., $r_{r(j)} = j$) ;
- p est une fonction de masse de probabilité, supportée sur $\mathcal{R}(D)$.

L'allocation par ordre aléatoire du joueur i est donnée par:

$$\phi_i = \sum_{r \in \mathcal{R}(D)} p(r) \left(v(D \setminus \{r_1, \dots, r_{r(i)-1}\}) - v(D \setminus \{r_1, \dots, r_{r(i)}\}) \right).$$

Allocations de Weber, modèles à ordre aléatoire

Les allocations par modèles à ordre aléatoires sont :

- Toujours **efficaces** (On partage tout le gâteau) ;
- **Positives** dès lors que v est **monotone pour l'inclusion** (ajouter un joueur ne fait pas baisser la valeur d'une coalition) :

$$\forall i \in D, \quad \forall A \subseteq D \setminus i, \quad v(A \cup \{i\}) \geq v(A).$$

- Et **plus si affinités** en fonction du choix de p .

Allocations de Weber, modèles à ordre aléatoire

Les allocations par modèles à ordre aléatoires sont :

- Toujours **efficaces** (On partage tout le gâteau) ;
- **Positives** dès lors que v est **monotone pour l'inclusion** (ajouter un joueur ne fait pas baisser la valeur d'une coalition) :

$$\forall i \in D, \quad \forall A \subseteq D \setminus i, \quad v(A \cup \{i\}) \geq v(A).$$

- Et **plus si affinités** en fonction du choix de p .

Les allocations par ordre aléatoire sont de **bons candidats** pour définir une **redistribution pertinente**.

Jeux coopératifs statistiques

L'analogie entre joueurs et covariables permettent de définir les **jeux coopératifs statistiques**.

Prenons un modèle de régression linéaire classique, qui pour des covariables $X = (X_1, \dots, X_d)^\top$, et on cherche à estimer :

$$Y = \sum_{i=1}^d \beta_i X_i + \epsilon$$

Lorsque l'ont régresse Y sur les d covariables, on parle de **modèle total**. On peut construire un modèle **emboîté** dans le modèle total, pour chaque sous-partie de variables $A \subseteq D$, i.e.,

$$Y = \sum_{i \in A} \beta_i X_i + \epsilon$$

Et on note, $R^2(A)$ le coefficient de détermination du modèle emboîté construit à partir des variables $X_i, i \in A$.

Jeux coopératifs statistiques

Un **jeu coopératif statistique** (Feldman 2005) sur un modèle de régression linéaire est défini comme le jeu :

$$(D, R^2)$$

où la fonction de valeur choisie est le coefficient de détermination de chaque modèle emboîté que l'on peut construire $R^2 : \mathcal{P}(D) \rightarrow \mathbb{R}^+$.

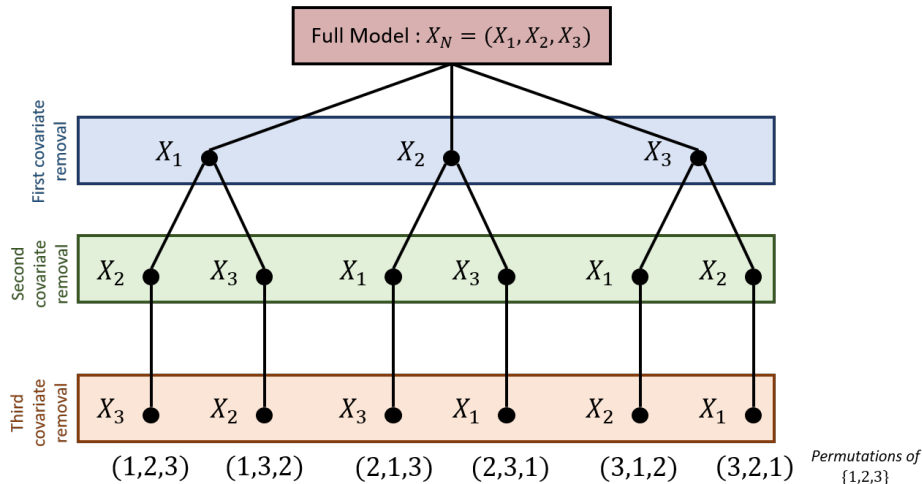
Dans ce cas-là, R^2 est effectivement **monotone pour l'inclusion**. Les allocations par ordre aléatoires de ce jeu coopératif statistique s'écrivent, pour $i \in D$, et pour un choix de p :

$$\phi_i = \sum_{r \in \mathcal{R}(D)} p(r) \left(R^2(D \setminus \{r_1, \dots, r_{r(i)-1}\}) - R^2(D \setminus \{r_1, \dots, r_{r(i)}\}) \right).$$

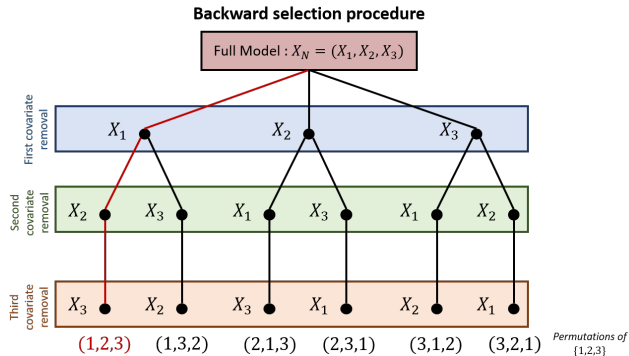
Ces allocations par modèle aléatoires s'apparente au **processus de sélection de variable backward** (Grömping 2007).

Allocation du R^2

Backward selection procedure



Allocation du R^2

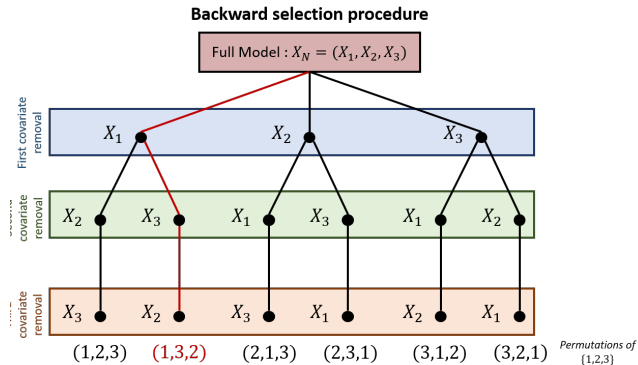


$$\phi_1 = p((1, 2, 3)) (R^2(\{1, 2, 3\}) - R^2(\{2, 3\})) + \dots$$

$$\phi_2 = p((1, 2, 3)) (R^2(\{2, 3\}) - R^2(\{3\})) + \dots$$

$$\phi_3 = p((1, 2, 3)) (R^2(\{3\}) - R^2(\emptyset)) + \dots$$

Allocation du R^2

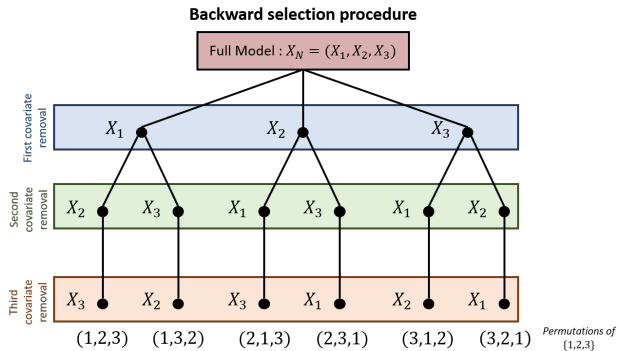


$$\phi_1 = p((1, 2, 3)) (R^2(\{1, 2, 3\}) - R^2(\{2, 3\})) + p((1, 3, 2)) (R^2(\{1, 2, 3\}) - R^2(\{2, 3\})) + \dots$$

$$\phi_2 = p((1, 2, 3)) (R^2(\{2, 3\}) - R^2(\{3\})) + p((1, 3, 2)) (R^2(\{2\}) - R^2(\emptyset)) + \dots$$

$$\phi_3 = p((1, 2, 3)) (R^2(\{3\}) - R^2(\emptyset)) + p((1, 3, 2)) (R^2(\{2, 3\}) - R^2(\{2\})) + \dots$$

Allocation du R^2



$$\phi_i = \sum_{r \in \mathcal{R}(D)} p(r) \left(R^2(D \setminus \{r_1, \dots, r_{r(i)-1}\}) - R^2(D \setminus \{r_1, \dots, r_{r(i)}\}) \right).$$

Allocation du R^2

Ainsi, les allocations par modèles à ordre aléatoires, lorsqu'appliquées aux jeux coopératifs statistiques, en particulier à la régression linéaire permettent de construire une décomposition du R^2 :

- $\sum_{i=1}^d \phi_i = R^2(D)$, la somme des allocations à chaque variable somme au R^2 du modèle total ;
- Pour toute covariable $i \in D$, $\phi_i \geq 0$.

Cette famille d'allocation permettent d'être interprétés comme des **parts** de R^2 , allouées à chacun des covariables du modèle.

Allocation du R^2

Ainsi, les allocations par modèles à ordre aléatoires, lorsqu'appliquées aux jeux coopératifs statistiques, en particulier à la régression linéaire permettent de construire une décomposition du R^2 :

- $\sum_{i=1}^d \phi_i = R^2(D)$, la somme des allocations à chaque variable somme au R^2 du modèle total ;
- Pour toute covariable $i \in D$, $\phi_i \geq 0$.

Cette famille d'allocation permettent d'être interprétés comme des **parts** de R^2 , allouées à chacun des covariables du modèle.

Mais comment choisir une fonction de masse de probabilité p pertinente ?

1. Jeux coopératifs statistiques et allocations

2. Mesures d'importance relatives

2.1 Critères d'admissibilité

2.2 Valeurs de Shapley (LMG)

2.3 Valeurs proportionnelles (PMVD)

3. Estimation

Quatre critères d'admissibilité peuvent-être tirés de la littérature (Cox 1985; Johnson and Lebreton 2004; Feldman 2005; Grömping 2007) :

- **Efficacité** : $\sum_{i=1}^d \phi_i = R^2(D)$;
- **Positivité** : $\forall i \in D, \phi(i) \geq 0$;
- **Exclusion** : Si $\beta_i = 0$, alors $\phi_i = 0$;
- **Inclusion** : Si $\beta_i \neq 0$, alors $\phi_i > 0$.

Comme l'**efficacité** et la **positivité** sont déjà assurés pour le jeu coopératif statistique (D, R^2) , on va chercher p de sorte à ce que les propriétés d'**exclusion** et d'**inclusion** soient respectées.

Valeurs de Shapley

Les **valeurs de Shapley** peuvent être interprétées comme

"[...] an a priori assessment of the situation, based on either ignorance or disregard of the social organization of the players." - L. S. Shapley (2016)

Les valeurs de Shapley d'un jeu coopératifs (D, v) peuvent être caractérisées de manière différentes :

$$\begin{aligned} \text{Shap}_i &= \sum_{A \subseteq D: i \in A} \frac{\sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} v(B)}{|A|} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{A \subseteq D \setminus \{j\}} \binom{d-1}{|A|}^{-1} (v(\{A \cup \{j\}\}) - v(A)) \\ &= \frac{1}{d!} \sum_{r \in \mathcal{R}(D)} (v(D \setminus \{r_1, \dots, r_{r(i)-1}\}) - v(D \setminus \{r_1, \dots, r_{r(i)}\})). \end{aligned}$$

Les valeurs de Shapley peuvent être vues comme le choix **uniforme** pour p (i.e., $p(r) = \frac{1}{d!}$).

Les indices **LMG** (Lindeman, Merenda, and Gold 1980) ne sont autre que les **valeurs de Shapley** du jeu coopératif statistique (D, R^2) construit sur une régression linéaire.

Comment se situent ces indices au vu des **quatre propriétés désirées** pour les mesures d'importance relative :

- **Efficacité** : OK.
- **Positivité** : OK.
- **Inclusion** : OK.
- **Exclusion** : une covariable X_i avec $\beta_i = 0$ peut avoir un indice LMG positif **dès lors qu'elle est corrélée avec d'autres covariables** (c'est la *blague de Shapley*).

Les indices **LMG** (Lindeman, Merenda, and Gold 1980) ne sont autre que les **valeurs de Shapley** du jeu coopératif statistique (D, R^2) construit sur une régression linéaire.

Comment se situent ces indices au vu des **quatre propriétés désirées** pour les mesures d'importance relative :

- **Efficacité** : OK.
- **Positivité** : OK.
- **Inclusion** : OK.
- **Exclusion** : une covariable X_i avec $\beta_i = 0$ peut avoir un indice LMG positif **dès lors qu'elle est corrélée avec d'autres covariables** (c'est la *blague de Shapley*).

Existe-t-il une allocation qui respecte ces **quatre propriétés** ?

Valeurs proportionnelles

Les **valeurs proportionnelles** sont un autre type d'allocation, qui peuvent être interprétées comme

"[...] splitting the coalitional surplus so each player gains in equal proportion to that which could be obtained by each alone." - B. Feldman (1999)

Elle se traduit par un choix particulier de p qui donne plus de masse aux ordres (permutations) "les plus décroissants" :

$$L(r) = \left(\prod_{i=1}^d \left(v(D \setminus \{r_1, \dots, r_{i-1}\}) - v(D \setminus \{r_1, \dots, r_i\}) \right) \right)^{-1}$$
$$p(r) = \frac{L(r)}{\sum_{i=1}^d L(r)}$$

Les indices **PMVD** (Proportional Marginal Variance Decomposition) (Feldman 2005; Grömping 2007) sont les **valeurs proportionnelles** du jeu statistique coopératif (D, R^2) construit sur un modèle de régression linéaire.

Il peut montrer que ces indices **respectent les quatre propriétés désirées des mesures d'importance relative** (Feldman 2005).

Ces indices ont été intensivement étudiés sur des cas pratiques par Grömping (2007, 2015).

1. Jeux coopératifs statistiques et allocations
2. Mesures d'importance relatives
3. Estimation

Ces indices sont assez **coûteux** à estimer. Il faut effectuer 2^d régressions linéaires, pour calculer les 2^d valeurs de R^2 correspondants aux différentes **combinaisons possibles de retrait de variables**.

Le temps de calcul est donc **exponentiel en la dimension totale des covariables**.

Cependant, ces calculs peuvent être faits en **parallèle** : implémentations dans `sensitivity` (TP1).

Cette limitation de calcul à la dimension rendent les indices **RWA** particulièrement intéressants en situation de grande dimension.

References i

- Cox, Louis A. 1985. "A New Measure of Attributable Risk for Public Health Applications" [in English]. *Management Science* 31, no. 7 (July): 800–813. issn: 0025-1909, 1526-5501. <https://doi.org/10.1287/mnsc.31.7.800>.
<http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/mnsc.31.7.800>.
- Feldman, B. 1999. *The Proportional Value of a Cooperative Game*, December. <http://fmwww.bc.edu/repec/es2000/1140.pdf>.
- Feldman, B. E. 2005. "Relative Importance and Value" [in English]. *SSRN Electronic Journal*, issn: 1556-5068.
<https://doi.org/10.2139/ssrn.2255827>. <http://www.ssrn.com/abstract=2255827>.
- Grömping, U. 2007. "Estimators of Relative Importance in Linear Regression Based on Variance Decomposition" [in English]. *The American Statistician* 61, no. 2 (May): 139–147. issn: 0003-1305, 1537-2731. <https://doi.org/10.1198/000313007X188252>.
<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1198/000313007X188252>.
- . 2015. "Variable importance in regression models" [in English]. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics* 7, no. 2 (March): 137–152. issn: 19395108. <https://doi.org/10.1002/wics.1346>. <http://doi.wiley.com/10.1002/wics.1346>.
- Johnson, J. W., and J. M. Lebreton. 2004. "History and Use of Relative Importance Indices in Organizational Research" [in English]. *Organizational Research Methods* 7, no. 3 (July): 238–257. issn: 1094-4281, 1552-7425.
<https://doi.org/10.1177/1094428104266510>. <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1094428104266510>.
- Lindeman, R. H., P. F. Merenda, and R. Z. Gold. 1980. *Introduction to Bivariate and Multivariate Analysis* [in English]. Scott, Foresman. isbn: 978-0-673-15099-8. <https://books.google.cz/books?id=-hfvAAAAMAAJ>.

Shapley, L. S. 2016. "17. A Value for n-Person Games." In *Contributions to the Theory of Games (AM-28), Volume II*, edited by Harold William Kuhn and Albert William Tucker, 307–318. Princeton University Press.
<https://doi.org/doi:10.1515/9781400881970-018>.

Weber, R. J. 1988. "Probabilistic values for games" [in English]. In *The Shapley Value*, 1st ed., 101–120. Cambridge University Press, October. ISBN: 978-0-521-36177-4 978-0-521-02133-3 978-0-511-52844-6. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511528446.008>.
https://www.cambridge.org/core/product/identifier/CBO9780511528446A014/type/book_part.

MERCI POUR VOTRE ÉCOUTE !

DES QUESTIONS ?