

Analyse de sensibilité spatialisée

Nathalie Saint-Geours
iTK, Montpellier

Pec'num²⁰¹⁵

École Centrale de Lyon, 21 mai 2015

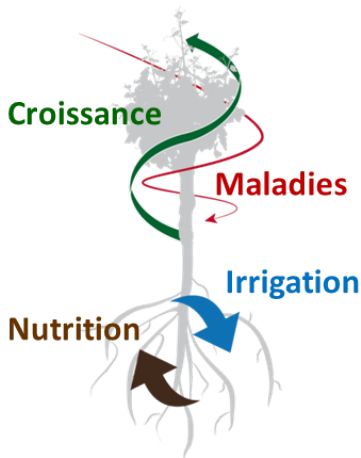
Société de R&D spécialisée dans le développement d'Outils d'Aide à la Décision pour l'agriculture et l'environnement

Double compétence

- Modélisation agronomique
- Développement informatique

Une solide PME

- 10 ans d'expérience
- 42 collaborateurs
(20 Doctorats, 20 Ingé.)



De quoi va-t-on parler ?

Analyse de sensibilité par décomposition de la variance pour des modèles spatialisés

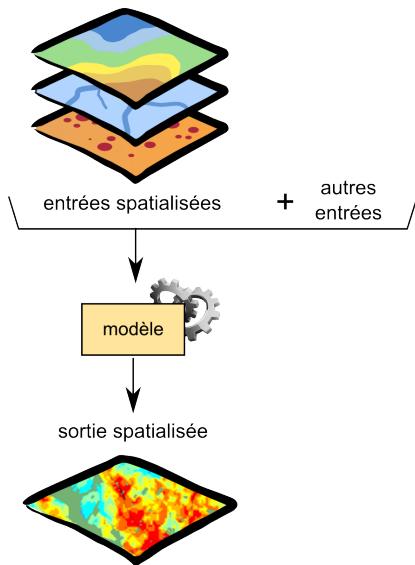
Analyse de sensibilité par décomposition de la variance pour des modèles spatialisés

Analyse de sensibilité
par décomposition de la variance
pour des modèles **spatialisés**

Qu'entend-on par **modèle spatialisé** ?

Qu'entend-on par modèle spatialisé ?

Qu'entend-on par modèle spatialisé ?



Qu'entend-on par modèle spatialisé ?

Notations

- ▶ entrées spatialisées :

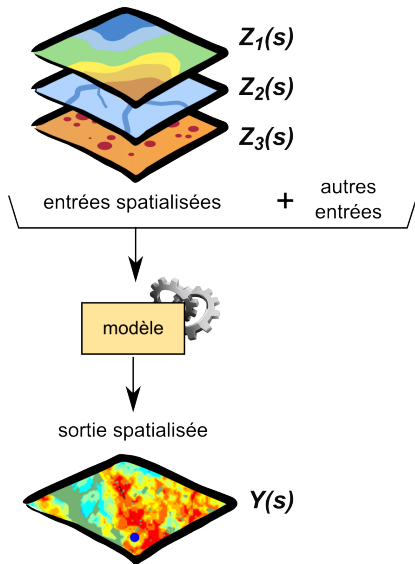
$Z(s)$ en tout point $s \in \mathcal{D}$

- ▶ entrées non spatialisées :

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$

- ▶ sortie spatialisée :

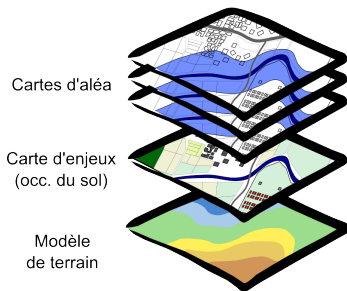
$Y(s)$ en tout point $s \in \mathcal{D}$



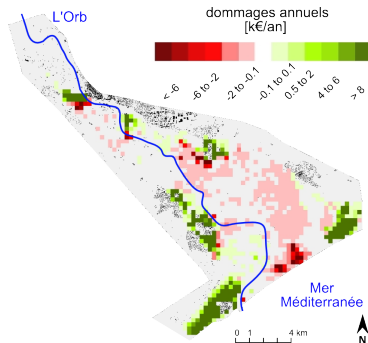
NOE : évaluation économique du risque d'inondation

Irstea - Grelot *et al.*

- ▶ **3 entrées spatialisées** et 2 entrées non spatialisées
- ▶ **sortie spatialisée** : carte des dommages moyens annuels



Entrées spatialisées

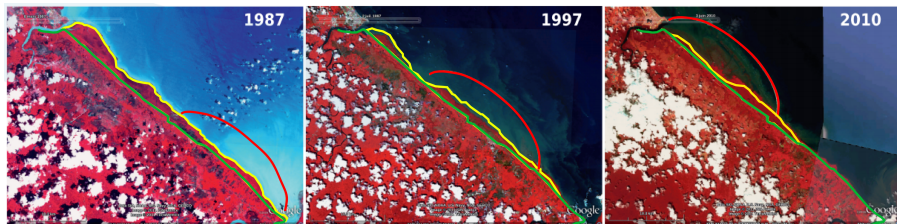


Sortie spatialisée

OCELET : dynamique de la mangrove en Guyane

CIRAD - Degenne *et al.* (2010)

- ▶ **entrées spatialisées** : trait de côte et mangrove à $t = 0$
- ▶ entrées non spatialisées : force et direction du courant, du vent. . .
- ▶ **sortie spatialisée** : géométrie de la mangrove au cours du temps



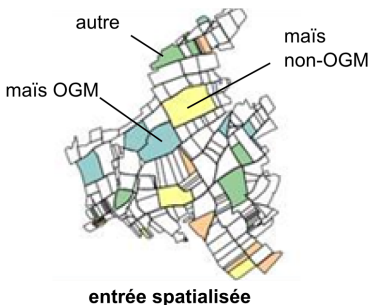
Crédit: Degenne *et al.* (2010)

MAPOD : flux de pollen dans les paysages agricoles

INRA, Angevin *et al.* (2008)

Étude de la dissémination de maïs OGM à l'échelle du paysage agricole.

- ▶ **entrée spatialisée** : carte des parcelles
- ▶ entrées non spatialisées : vent, caractéristiques des variétés de maïs
- ▶ **sortie spatialisée** : taux de pollinisation croisée non-OGM/ OGM

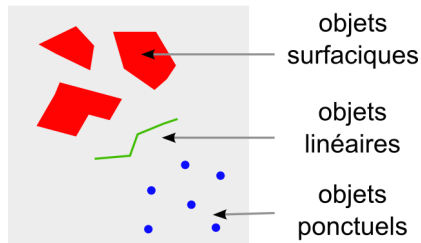
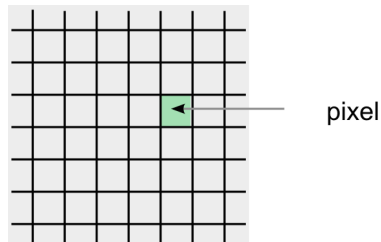


Modèle spatialisé : représentation de l'espace

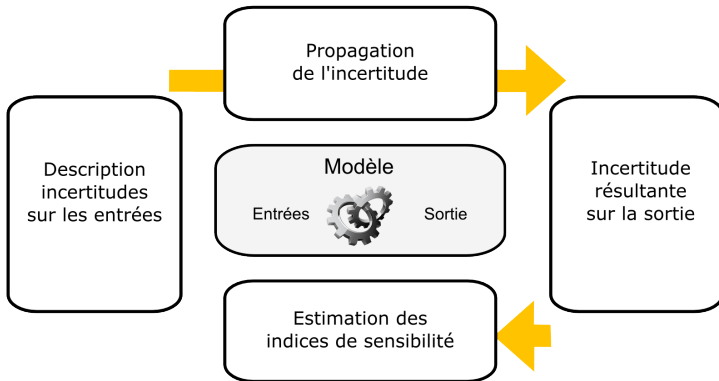
Modèle spatialisé : représentation de l'espace

Deux options (au moins)

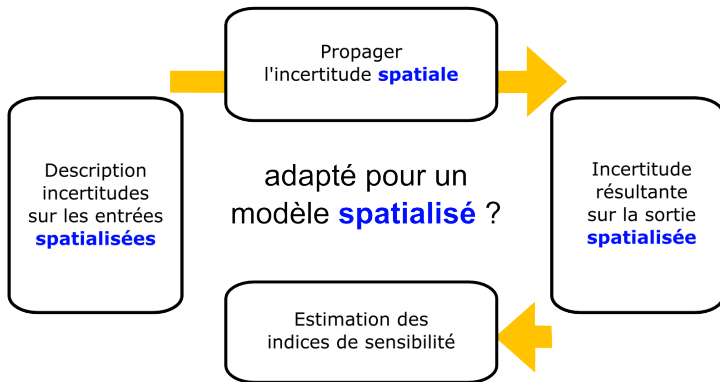
- ▶ grille régulière
- ▶ ou données vectorielles : points, lignes, polygones



AS de modèles spatialisés : quelles difficultés ?

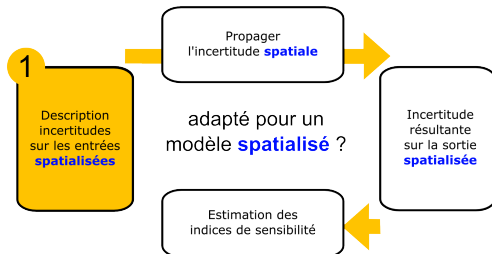


AS de modèles spatialisés : quelles difficultés ?



1^{er} point

Comment décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées ?



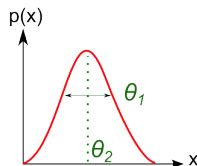
Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

entrée
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

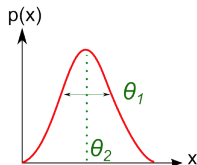
entrée
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$



loi de probabilité P_X
de param. θ

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

entrée
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$



loi de probabilité P_x
de param. θ



$$x^{(1)} = 12.3$$

$$x^{(2)} = 4.5$$

$$x^{(3)} = 8.9$$

$$x^{(4)} = 7.4$$

$$x^{(5)} = 48.5$$

$$x^{(6)} = 23$$

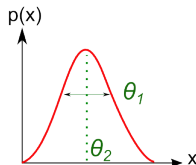
$$x^{(7)} = 8.5$$

$$x^{(8)} = 10.5$$

échantillon

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

entrée
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$



loi de probabilité P_x
de param. θ



$$x^{(1)} = 12.3$$

$$x^{(2)} = 4.5$$

$$x^{(3)} = 8.9$$

$$x^{(4)} = 7.4$$

$$x^{(5)} = 48.5$$

$$x^{(6)} = 23$$

$$x^{(7)} = 8.5$$

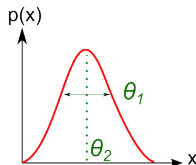
$$x^{(8)} = 10.5$$

échantillon

entrée
spatialisée
 $\{Z(s) | s \in \mathcal{D}\}$

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

entrée
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$



loi de probabilité $P_{\mathbf{X}}$
de param. θ



$$x^{(1)} = 12.3$$

$$x^{(2)} = 4.5$$

$$x^{(3)} = 8.9$$

$$x^{(4)} = 7.4$$

$$x^{(5)} = 48.5$$

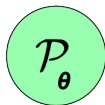
$$x^{(6)} = 23$$

$$x^{(7)} = 8.5$$

$$x^{(8)} = 10.5$$

échantillon

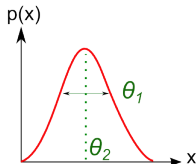
entrée
spatialisée
 $\{Z(s) | s \in \mathcal{D}\}$



processus
stochastique
de param. θ

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

entrée
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$

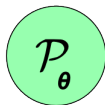


loi de probabilité P_X
de param. θ



$x^{(1)} = 12.3$
 $x^{(2)} = 4.5$
 $x^{(3)} = 8.9$
 $x^{(4)} = 7.4$
 $x^{(5)} = 48.5$
 $x^{(6)} = 23$
 $x^{(7)} = 8.5$
 $x^{(8)} = 10.5$
échantillon

entrée
spatialisée
 $\{Z(s) | s \in \mathcal{D}\}$



processus
stochastique
de param. θ



n réalisations aléatoires

Données continues sur une grille régulière

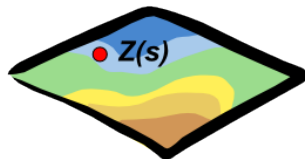
Ex : température du sol, pluie, concentration d'un polluant

Données continues sur une grille régulière

Ex : température du sol, pluie, concentration d'un polluant

Cadre de la géostatistique

- ▶ simulation de champs aléatoires continus $\{Z(s), s \in \mathcal{D}\}$



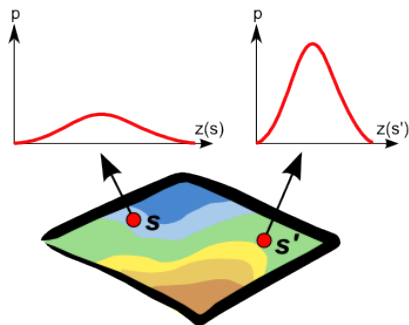
Données continues sur une grille régulière

Ex : température du sol, pluie, concentration d'un polluant

Cadre de la géostatistique

- ▶ simulation de champs aléatoires continus $\{Z(s), s \in \mathcal{D}\}$
- ▶ non stationarité dans l'espace

$$s, s' \in \mathcal{D}, \mathbb{P}_{Z(s)} \neq \mathbb{P}_{Z(s')}$$



Données continues sur une grille régulière

Ex : température du sol, pluie, concentration d'un polluant

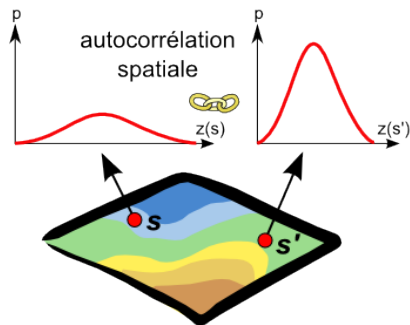
Cadre de la géostatistique

- ▶ simulation de champs aléatoires continus $\{Z(s), s \in \mathcal{D}\}$

- ▶ non stationarité dans l'espace

$$s, s' \in \mathcal{D}, \mathbb{P}_{Z(s)} \neq \mathbb{P}_{Z(s')}$$

- ▶ **autocorrélation spatiale**



Données continues sur une grille régulière

Ex : température du sol, pluie, concentration d'un polluant

Cadre de la géostatistique

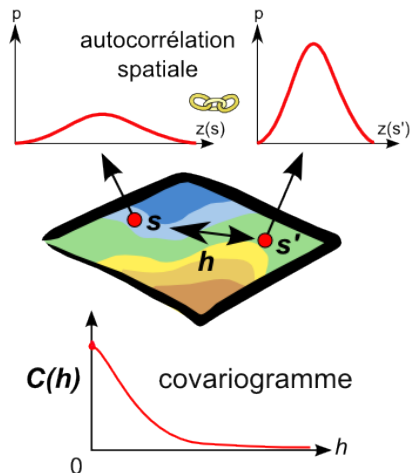
- ▶ simulation de champs aléatoires continus $\{Z(s), s \in \mathcal{D}\}$
- ▶ non stationarité dans l'espace

$$s, s' \in \mathcal{D}, \mathbb{P}_{Z(s)} \neq \mathbb{P}_{Z(s')}$$

- ▶ **autocorrélation** spatiale
- ▶ **covariogramme**

(si stationarité d'ordre 2)

$$\text{cov}[Z(s), Z(s+h)] = C(h)$$



Données continues sur une grille régulière

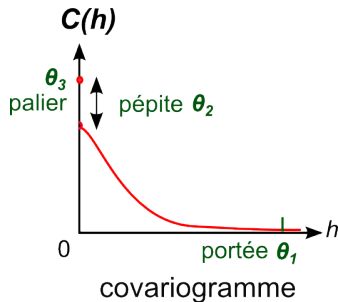
Ex : température du sol, pluie, concentration d'un polluant

Données continues sur une grille régulière

Ex : température du sol, pluie, concentration d'un polluant

Processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$

- ▶ une distribution de $Z(s)$
- ▶ un covariogramme $C(h)$
- ▶ + un algorithme de simulation



Données continues sur une grille régulière

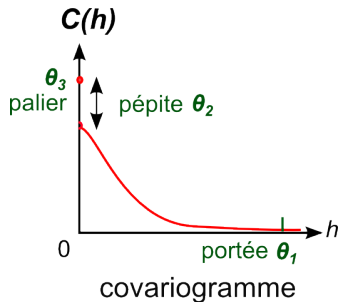
Ex : température du sol, pluie, concentration d'un polluant

Processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$

- ▶ une distribution de $Z(s)$
- ▶ un covariogramme $C(h)$
- ▶ + un algorithme de simulation

Outils dans

- ▶ gstat, geoR, RandomFields...



Données continues sur une grille régulière

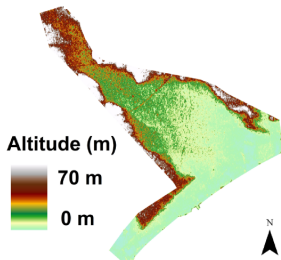
Illustration : modèle NOE (risque d'inondation)

Données continues sur une grille régulière

Illustration : modèle NOE (risque d'inondation)

Modèle Numérique de Terrain

- ▶ grille de 5m de résolution
- ▶ issue de photos aériennes
- ▶ erreurs de mesure et d'interpolation



Données continues sur une grille régulière

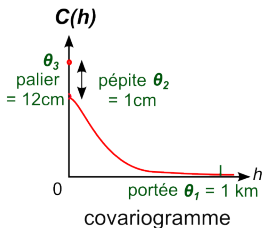
Illustration : modèle NOE (risque d'inondation)

Modèle Numérique de Terrain

- ▶ grille de 5m de résolution
- ▶ issue de photos aériennes
- ▶ erreurs de mesure et d'interpolation

Processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$

- ▶ erreur Gaussienne $\epsilon(s)$
- ▶ contrôles terrain $\rightarrow$ estimation du covariogramme $C(h)$
- ▶ Sequential Gaussian Simulation



Données continues sur une grille régulière

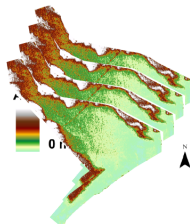
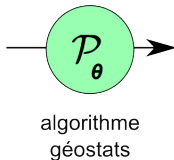
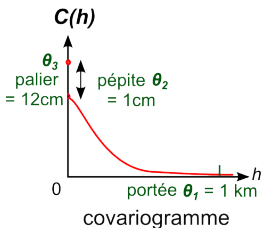
Illustration : modèle NOE (risque d'inondation)

Modèle Numérique de Terrain

- ▶ grille de 5m de résolution
- ▶ issue de photos aériennes
- ▶ erreurs de mesure et d'interpolation

Processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$

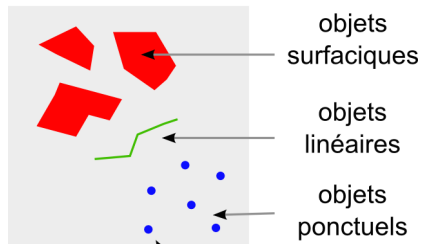
- ▶ erreur Gaussienne $\epsilon(s)$
- ▶ contrôles terrain $\rightarrow$ estimation du covariogramme $C(h)$
- ▶ Sequential Gaussian Simulation



**$n=100$ réalisations
aléatoires du MNT**

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.



	FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
▶	0	Polygone	300	OGM
	1	Polygone	1000	NON-OGM
	2	Polygone	3289	AUTRE
	3	Polygone	150	OGM
	4	Polygone	0	OGM
	5	Polygone	4987	AUTRE

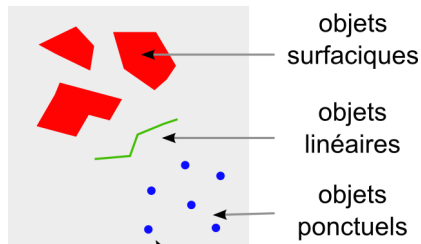
attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.

Composantes de l'incertitude dans une BD géographique (norme ISO 19115)

- ▶ exhaustivité
- ▶ cohérence logique
- ▶ précision géométrique
- ▶ précision sémantique
- ▶ précision temporelle



	FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
▶	0	Polygone	300	OGM
	1	Polygone	1000	NON-OGM
	2	Polygone	3289	AUTRE
	3	Polygone	150	OGM
	4	Polygone	0	OGM
	5	Polygone	4987	AUTRE

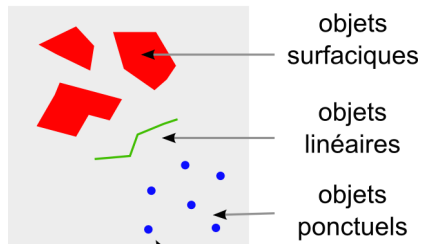
attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.

Composantes de l'incertitude dans une BD géographique (norme ISO 19115)

- ▶ exhaustivité
- ▶ cohérence logique
- ▶ précision géométrique
- ▶ précision sémantique
- ▶ précision temporelle



	FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
▶	0	Polygone	300	OGM
	1	Polygone	1000	NON-OGM
	2	Polygone	3289	AUTRE
	3	Polygone	150	OGM
	4	Polygone	0	OGM
	5	Polygone	4987	AUTRE

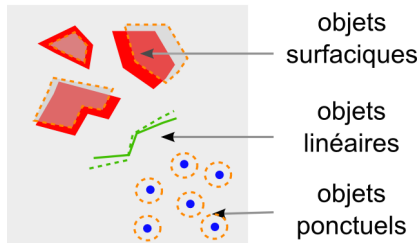
attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.

Précision géométrique

- ▶ erreurs sur la **localisation**
- ▶ erreurs sur la **forme** des objets



Données vectorielles (points, lignes, polygones)

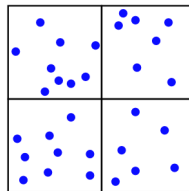
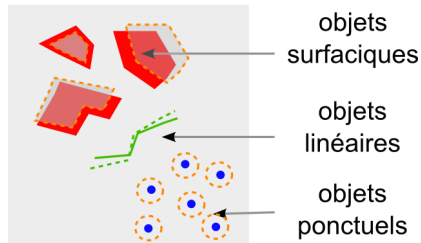
Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.

Précision géométrique

- ▶ erreurs sur la **localisation**
- ▶ erreurs sur la **forme** des objets

Quels processus stochastiques ?

- ▶ processus ponctuels aléatoires
- ▶ tessellations aléatoires...



processus ponctuels



tessellations aléatoires

Viaud et al. (2008)

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.

Précision géométrique

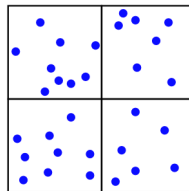
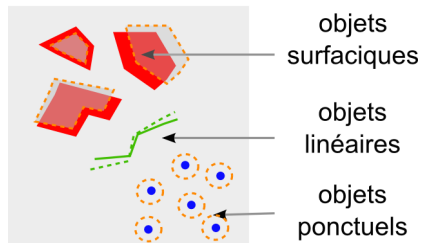
- ▶ erreurs sur la **localisation**
- ▶ erreurs sur la **forme** des objets

Quels processus stochastiques ?

- ▶ processus ponctuels aléatoires
- ▶ tessellations aléatoires...

Outils dans

- ▶ spatstat, stpp



processus ponctuels

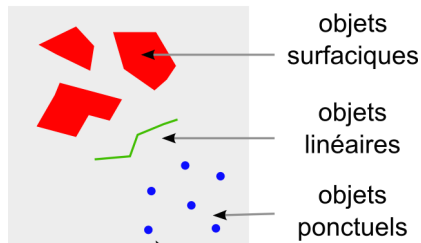


tessellations aléatoires

Viaud et al. (2008)

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.

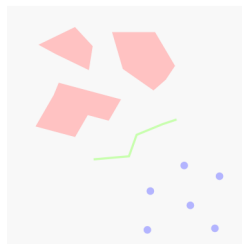


	FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
▶	0	Polygone	300	OGM
	1	Polygone	1000	NON-OGM
	2	Polygone	3289	AUTRE
	3	Polygone	150	OGM
	4	Polygone	0	OGM
	5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.



objets
surfaciques

objets
linéaires

objets
ponctuels

Précision sémantique

- ▶ erreurs sur les **attributs X**
- ▶ **X** quantitatif ou qualitatif

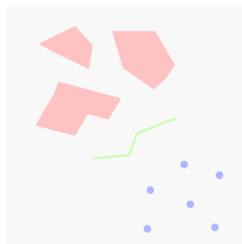
	FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
▶	0	Polygone	300	OGM
	1	Polygone	1000	NON-OGM
	2	Polygone	3289	AUTRE
	3	Polygone	150	OGM
	4	Polygone	0	OGM
	5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.

Quels processus stochastiques ?



objets
surfaciques

objets
linéaires

objets
ponctuels

Précision sémantique

- ▶ erreurs sur les **attributs X**
- ▶ **X** quantitatif ou qualitatif

	FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
▶	0	Polygone	300	OGM
	1	Polygone	1000	NON-OGM
	2	Polygone	3289	AUTRE
	3	Polygone	150	OGM
	4	Polygone	0	OGM
	5	Polygone	4987	AUTRE

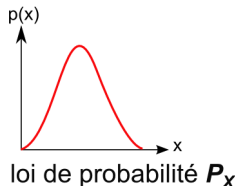
attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.

Quels processus stochastiques ?

- **X** quantitatif : recherche de $\mathbb{P}_X$



Précision sémantique

- erreurs sur les **attributs X**
- **X** quantitatif ou qualitatif

	FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
►	0	Polygone	300	OGM
	1	Polygone	1000	NON-OGM
	2	Polygone	3289	AUTRE
	3	Polygone	150	OGM
	4	Polygone	0	OGM
	5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

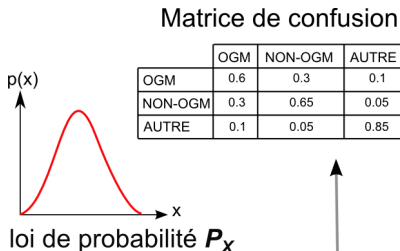
Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.

Quels processus stochastiques ?

- **X** quantitatif : recherche de $\mathbb{P}_X$
- **X** qualitatif :
matrice de confusion

$$m_{ij} = \mathbb{P}(i \rightarrow j)$$



Précision sémantique

- erreurs sur les **attributs X**
- **X** quantitatif ou qualitatif

	FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
►	0	Polygone	300	OGM
	1	Polygone	1000	NON-OGM
	2	Polygone	3289	AUTRE
	3	Polygone	150	OGM
	4	Polygone	0	OGM
	5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.

Quels processus stochastiques ?

- **X** quantitatif : recherche de $\mathbb{P}_X$
- **X** qualitatif :
matrice de confusion

$$m_{ij} = \mathbb{P}(i \rightarrow j)$$

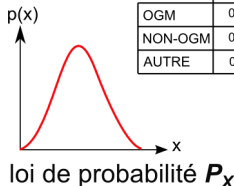
- dépendance spatiale :
contrôlée de manière ad-hoc

Précision sémantique

- erreurs sur les **attributs X**
- **X** quantitatif ou qualitatif

Matrice de confusion

	OGM	NON-OGM	AUTRE
OGM	0.6	0.3	0.1
NON-OGM	0.3	0.65	0.05
AUTRE	0.1	0.05	0.85



	FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
►	0	Polygone	300	OGM
	1	Polygone	1000	NON-OGM
	2	Polygone	3289	AUTRE
	3	Polygone	150	OGM
	4	Polygone	0	OGM
	5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle NOE

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle NOE

Carte d'occupation du sol

- ▶ objets vectoriels
(bâti, parcelles, usines)
- ▶ issue d'images satellites
+ enquêtes terrain



Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle NOE

Carte d'occupation du sol

- ▶ objets vectoriels
(bâti, parcelles, usines)
- ▶ issue d'images satellites
+ enquêtes terrain

	forêt	eau	entrepôt	vignes	blé	bâti
forêt						
eau						
entrepôt						
culture - vignes						
culture - blé						
bâti						

matrice de confusion
entre 30 classes
d'occupation du sol

Processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$

- ▶ erreurs d'étiquetage des objets
(attribut **X** qualitatif)
- ▶ matrice de confusion

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

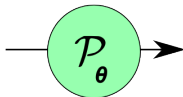
Illustration : modèle NOE

Carte d'occupation du sol

- ▶ objets vectoriels (bâti, parcelles, usines)
- ▶ issue d'images satellites + enquêtes terrain

	forêt	eau	entrepôt	vignes	blé	bâti
forêt						
eau						
entrepôt						
culture - vignes						
culture - blé						
bâti						

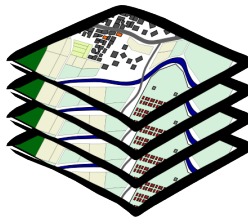
matrice de confusion
entre 30 classes
d'occupation du sol



tirages
aléatoires

Processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$

- ▶ erreurs d'étiquetage des objets (attribut **X** qualitatif)
- ▶ matrice de confusion



**$n=1000$ réalisations aléatoires
de la carte d'occupation du sol**

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

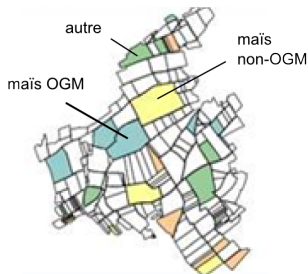
Illustration : modèle MAPOD

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle MAPOD

Entrée : carte du parcellaire

- ▶ parcelle = polygone de forme variable
- ▶ attribut **X** qualitatif :
OGM / NON-OGM / AUTRE

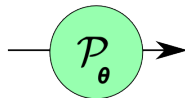
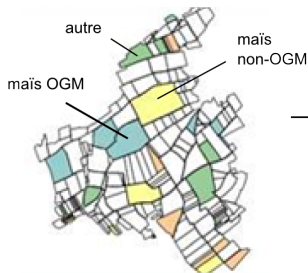


Données vectorielles (points, lignes, polygones)

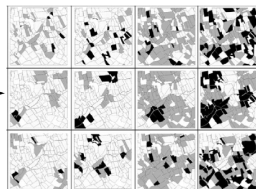
Illustration : modèle MAPOD

Entrée : carte du parcellaire

- ▶ parcelle = polygone de forme variable
- ▶ attribut **X** qualitatif :
OGM / NON-OGM / AUTRE



algorithme
ad-hoc



Viaud et al. (2008)

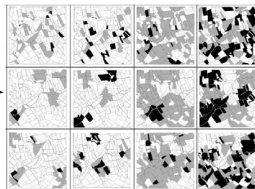
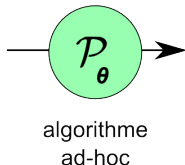
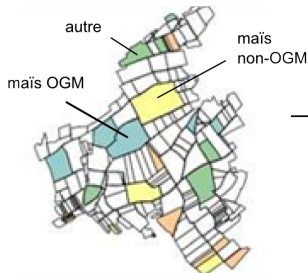
**nombreuses réalisations
aléatoires du parcellaire**

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle MAPOD

Entrée : carte du parcellaire

- ▶ parcelle = polygone de forme variable
- ▶ attribut **X** qualitatif :
OGM / NON-OGM / AUTRE



Viaud et al. (2008)

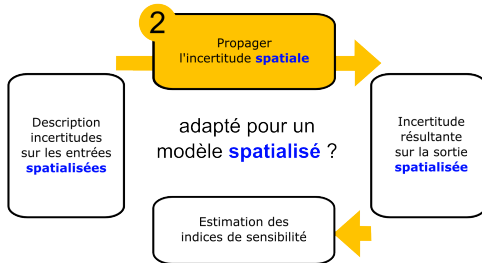
**nombreuses réalisations
aléatoires du parcellaire**

Processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$

- ▶ θ_1 : géométrie des parcelles
- ▶ θ_2 : niveau d'aggrégation spatiale des parcelles OGM
- ▶ θ_3 : rapport des surfaces OGM/non OGM

2ème point

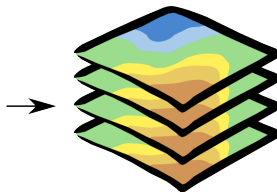
Comment propager l'incertitude dans un modèle spatialisé ?



De quelle incertitude parle-t-on ?



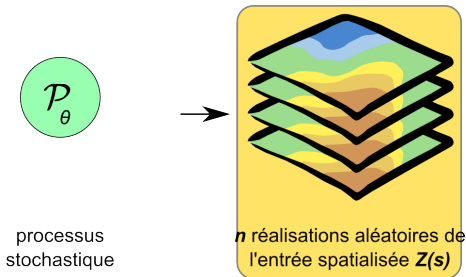
processus
stochastique



n réalisations aléatoires de
l'entrée spatialisée $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$

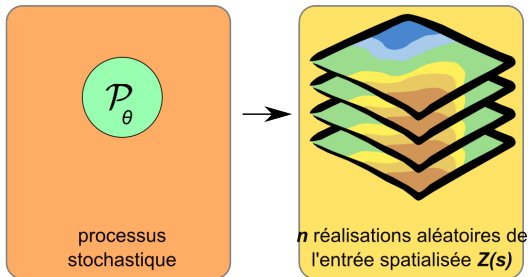
De quelle incertitude parle-t-on ?

- ▶ variabilité de l'ensemble des n réalisations aléatoires (pour un processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$ fixé)

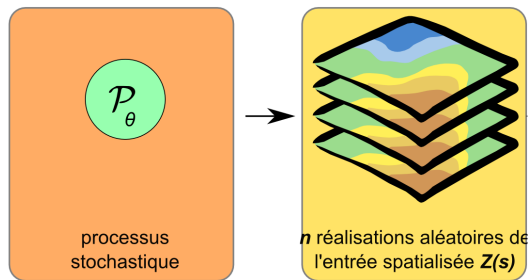


De quelle incertitude parle-t-on ?

- ▶ variabilité de l'ensemble des n réalisations aléatoires (pour un processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$ fixé)
- ▶ incertitude additionnelle sur les paramètres θ du processus $\mathcal{P}_\theta$



Méthodes de propagation



Méthodes de propagation

- ▶ diverses approches rencontrées dans la littérature

**Second
Niveau**

**Macro
Paramètre**

**Réduction
Dimension**

**Etiquetage
de Cartes**

**Métamodèles
Joints**

**Variable
Bascule**

Méthodes de propagation

- ▶ diverses approches rencontrées dans la littérature
- ▶ **entrée spatialisée $Z(s)$** → quelques **entrées scalaires** → utilisation des méthodes usuelles

**Second
Niveau**

**Macro
Paramètre**

**Réduction
Dimension**

**Etiquetage
de Cartes**

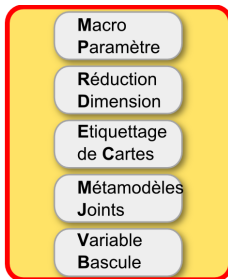
**Métamodèles
Joints**

**Variable
Bascule**

Propagation des incertitudes

Méthodes de propagation

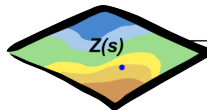
- ▶ diverses approches rencontrées dans la littérature
- ▶ **entrée spatialisée $Z(s)$** → quelques **entrées scalaires** → utilisation des méthodes usuelles



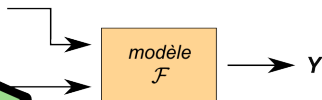
Macro-paramètre

entrées non spatialisées

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^k$$

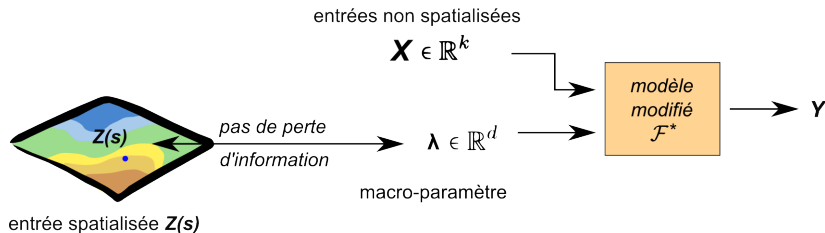


entrée spatialisée $Z(s)$



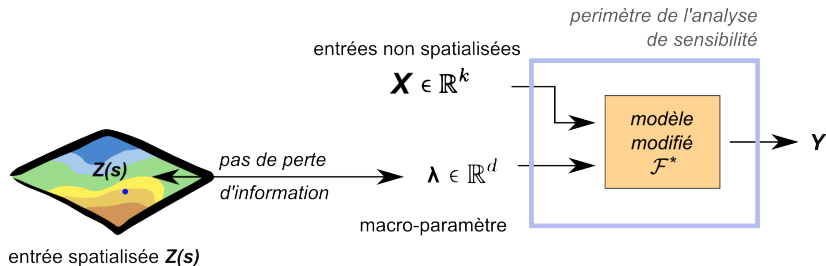
Macro-paramètre

- considérer $Z(s)$ comme un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ (non indépendantes)



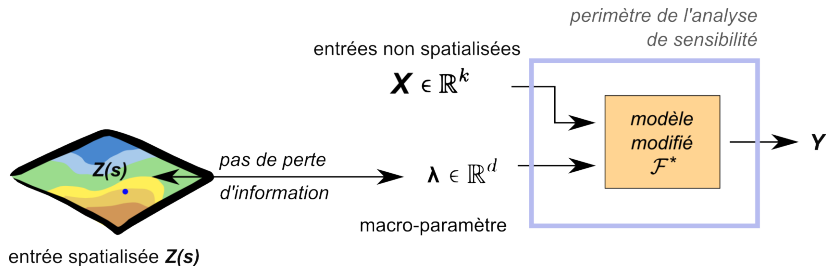
Macro-paramètre

- considérer $Z(s)$ comme un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ (non indépendantes)



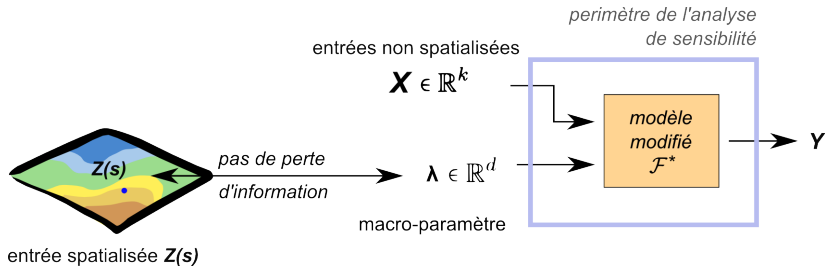
Macro-paramètre

- ▶ considérer $Z(s)$ comme un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ (non indépendantes)
- ▶ calculer l'**indice de sensibilité S_λ du groupe** $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$

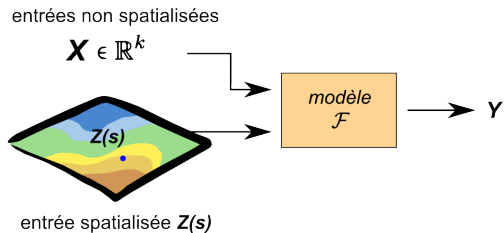


Macro-paramètre

- ▶ considérer $Z(s)$ comme un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ (non indépendantes)
- ▶ calculer l'**indice de sensibilité** S_λ **du groupe** $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$
- ▶ praticable pour d petit

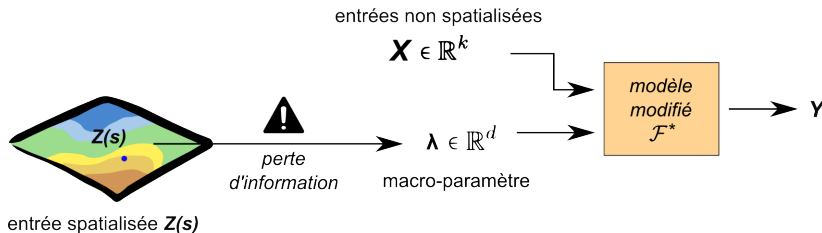


Réduction de la dimension



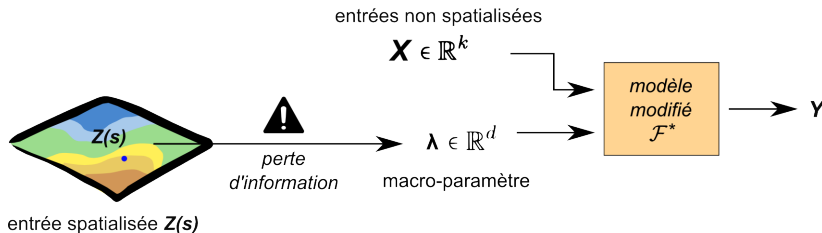
Réduction de la dimension

- **réduire** l'information contenue dans $Z(s)$ à un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (indépendantes ou non) :



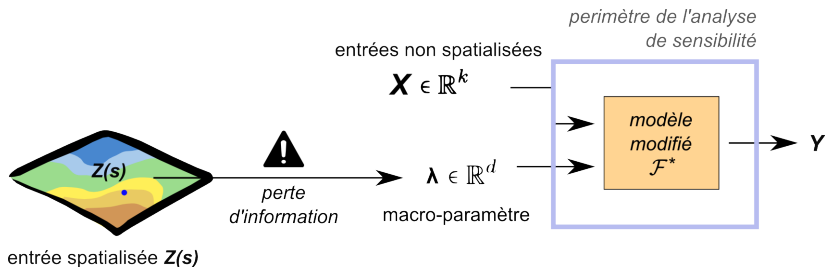
Réduction de la dimension

- **réduire** l'information contenue dans $Z(s)$ à un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (indépendantes ou non) :
 - simplification de la donnée initiale
 - décomposition sur une base (ondelettes, Karhunen-Loeve, etc.)



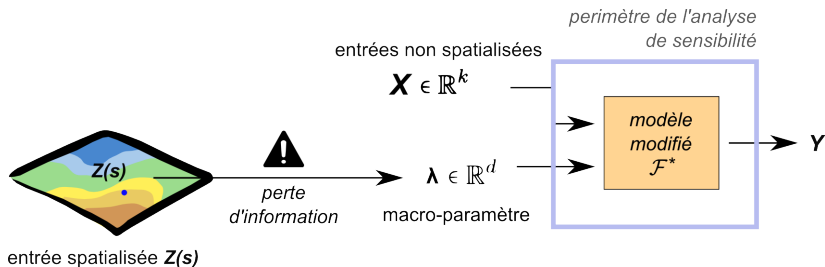
Réduction de la dimension

- **réduire** l'information contenue dans $Z(s)$ à un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (indépendantes ou non) :
 - simplification de la donnée initiale
 - décomposition sur une base (ondelettes, Karhunen-Loeve, etc.)



Réduction de la dimension

- ▶ **réduire** l'information contenue dans $Z(s)$ à un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (indépendantes ou non) :
 - ▶ simplification de la donnée initiale
 - ▶ décomposition sur une base (ondelettes, Karhunen-Loeve, etc.)
- ▶ calculer l'**indice de sensibilité** S_λ **du groupe** $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$

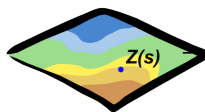


Variable bascule

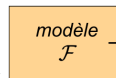
Crosetto & Tarantola (2001)

entrées non spatialisées

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^k$$



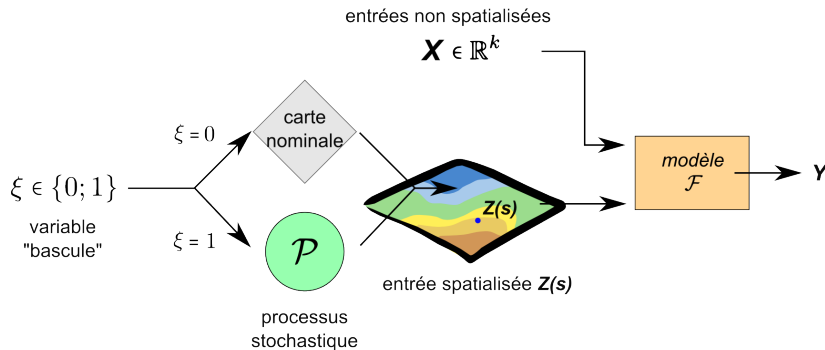
entrée spatialisée $Z(s)$



$\mathbf{Y}$

Variable bascule

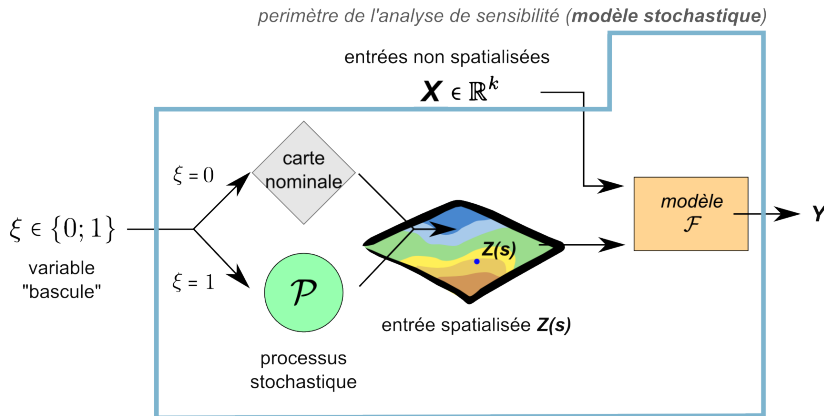
Crosetto & Tarantola (2001)



Variable bascule

Crosetto & Tarantola (2001)

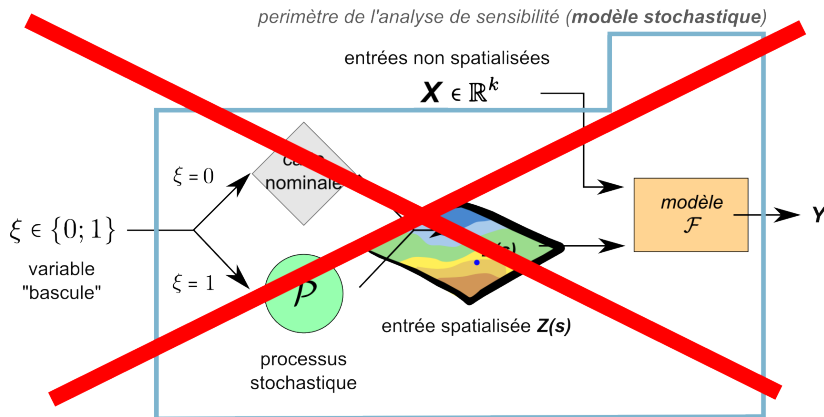
- calcul de l'indice de sensibilité S_ξ de la variable bascule ξ



Variable bascule

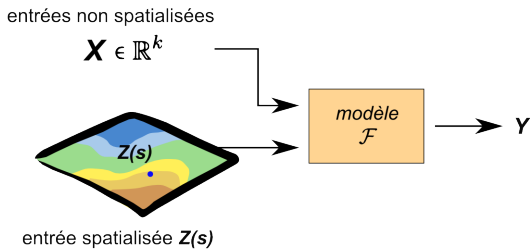
Crosetto & Tarantola (2001)

- calcul de l'indice de sensibilité S_ξ de la variable bascule ξ
- attention : $S_\xi \neq S_Z$!



Étiquetage de cartes

Lilburne & Tarantola (2009)

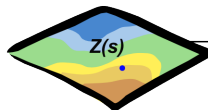


Étiquetage de cartes

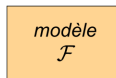
Lilburne & Tarantola (2009)

entrées non spatialisées

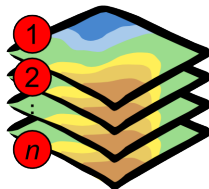
$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^k$$



entrée spatialisée $\mathbf{Z}(s)$



$\rightarrow Y$



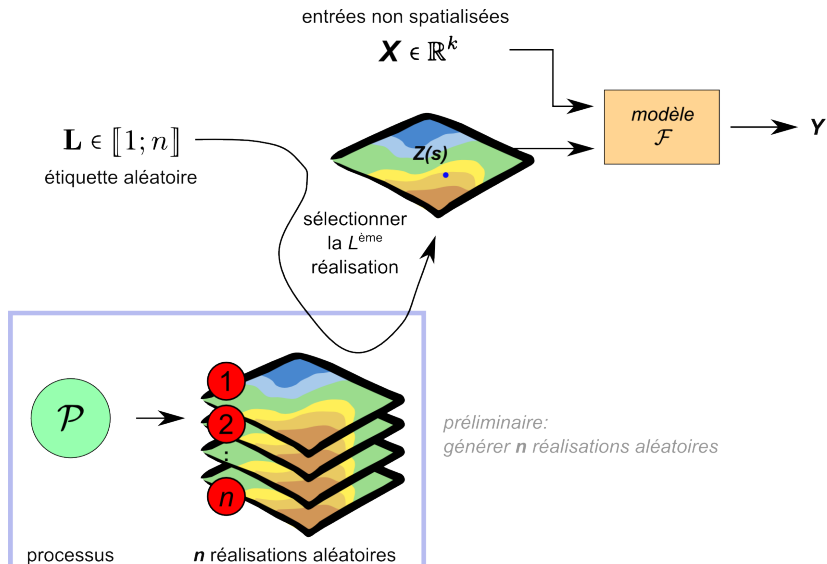
*préliminaire:
générer n réalisations aléatoires*

processus

n réalisations aléatoires

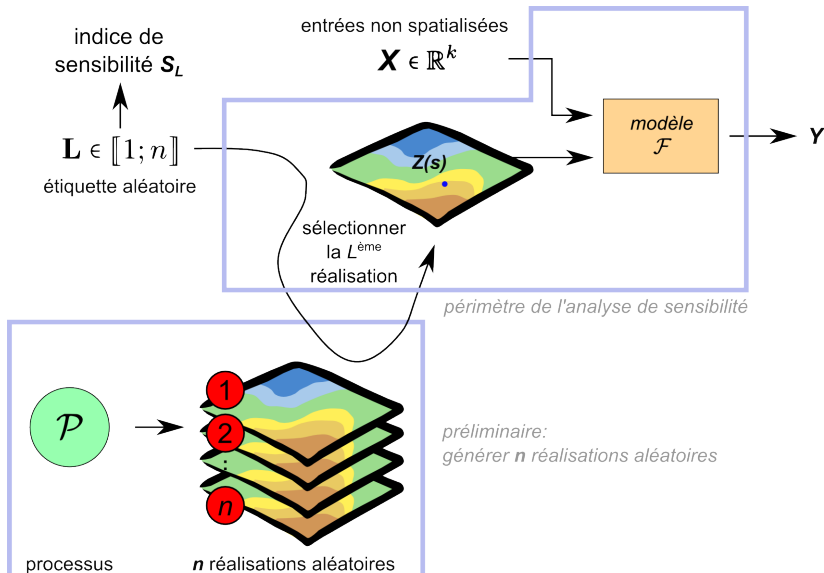
Étiquetage de cartes

Lilburne & Tarantola (2009)



Étiquetage de cartes

Lilburne & Tarantola (2009)



Utilisation de méta-modèles ?

Méta-modèles avec **entrée spatialisée** :

Méta-modèles avec **entrée spatialisée** :

- ▶ option 1 : décomposition de $Z(s)$ sur une base :

$$Z(s) = \sum_i \alpha_i \phi_i(s)$$

- ▶ variables α_i et X utilisées comme entrées du méta-modèle

Méta-modèles avec **entrée spatialisée** :

- ▶ option 1 : décomposition de $Z(s)$ sur une base :

$$Z(s) = \sum_i \alpha_i \phi_i(s)$$

- ▶ variables α_i et X utilisées comme entrées du méta-modèle
- ▶ option 2 : méta-modèles joints (*Iooss & Ribatet (2009)*)
 - ▶ entrée $Z(s)$ considérée comme *variable incontrôlable*
 - ▶ un méta-modèle sur $\mathbb{E}(Y \mid \mathbf{X})$
 - ▶ un méta-modèle sur $\text{var}(Y \mid \mathbf{X})$
 - ▶ estimation d'un indice S_Z

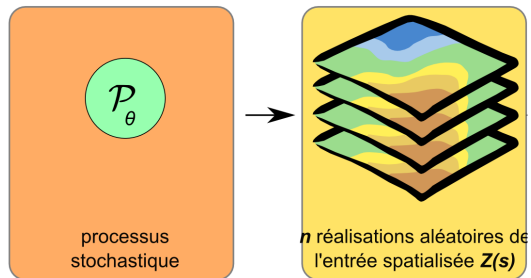
Méta-modèles avec **sortie spatialisée** :

- ▶ décomposition de $Y(s)$ sur une base :

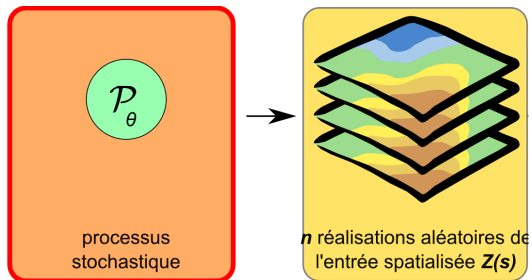
$$Y(s) = \sum_i \alpha_i \phi_i(s)$$

- ▶ construction d'un méta-modèle **pour chaque** α_i
- ▶ reconstitution de $Y(s)$ à partir des α_i

Propagation des incertitudes



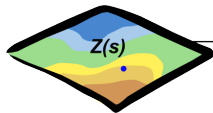
Propagation des incertitudes



Propagation d'incertitude de second niveau

entrées non spatialisées

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^k$$



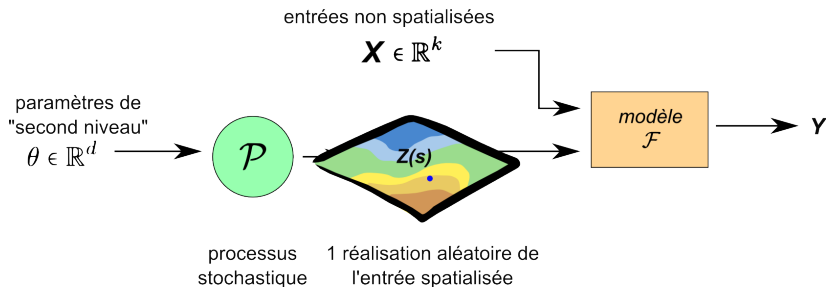
entrée spatialisée $\mathbf{Z(s)}$

modèle
 $\mathcal{F}$

$\longrightarrow Y$

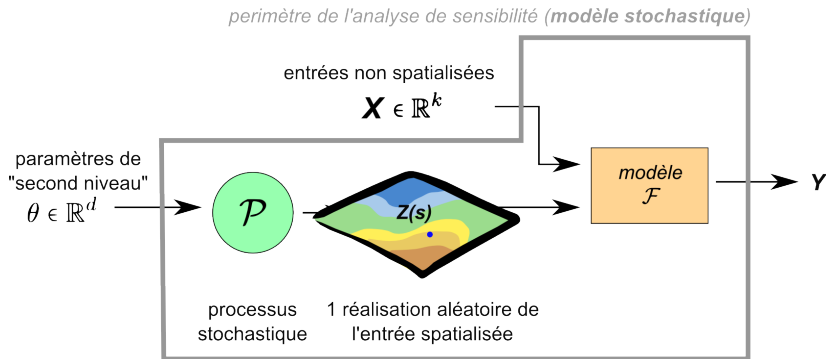
Propagation d'incertitude de second niveau

- ▶ échantillonnage des paramètres θ_j du processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$ (supposés **indépendants**)



Propagation d'incertitude de second niveau

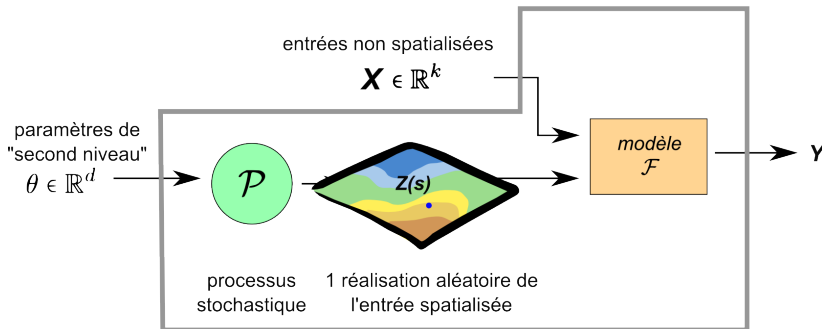
- ▶ échantillonnage des paramètres θ_j du processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$ (supposés **indépendants**)
- ▶ on analyse un nouveau modèle qui est **stochastique** !



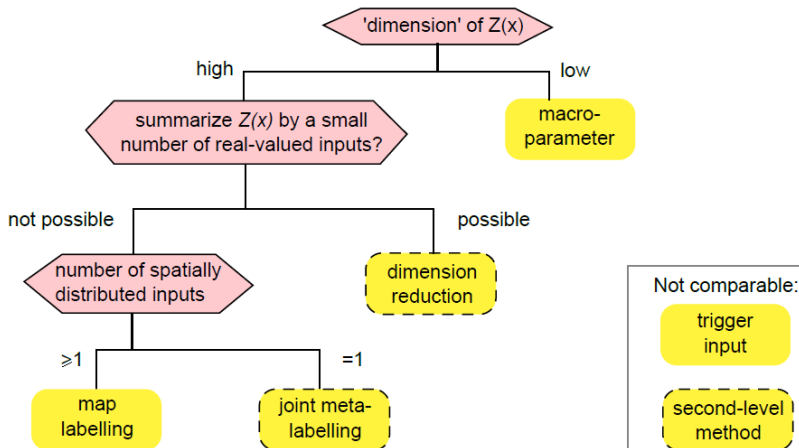
Propagation d'incertitude de second niveau

- ▶ échantillonnage des paramètres θ_j du processus stochastique $\mathcal{P}_\theta$ (supposés **indépendants**)
- ▶ on analyse un nouveau modèle qui est **stochastique** !
- ▶ **attention** : $S_\theta \neq S_Z$!

perimètre de l'analyse de sensibilité (modèle stochastique)

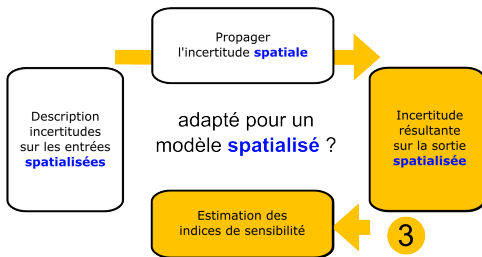


Comparaison des méthodes



3^{ème} point

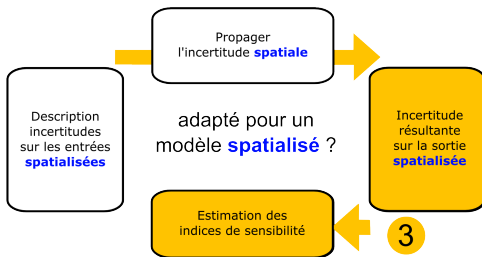
Quels indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$?



3^{ème} point

Quels indices de sensibilité
pour une sortie spatialisée $Y(s)$?

→ **3 stratégies possibles**



Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 1 : indices de sensibilité **ponctuels**

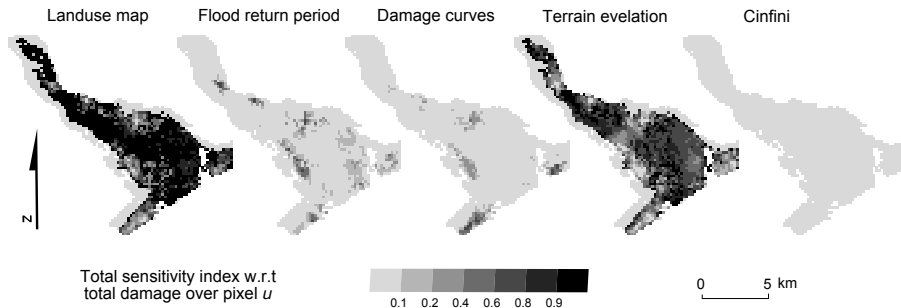
Stratégie 1 : indices de sensibilité **ponctuels**

- calcul de $S_i(s)$ par rapport à $Y(s)$ **en tout point** $s \in \mathcal{D}$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 1 : indices de sensibilité **ponctuels**

- ▶ calcul de $S_i(s)$ par rapport à $Y(s)$ **en tout point** $s \in \mathcal{D}$
- ▶ **cartes d'indices de sensibilité** $\mathcal{S}_i = \{S_i(s), s \in \mathcal{D}\}$



Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 2 : indices de sensibilité **agrégés**

Lamboni *et al.* (2011)

Idée : moyenne pondérée des indices de sensibilité ponctuels $S_i(s)$

Stratégie 2 : indices de sensibilité **agrégés**

Lamboni *et al.* (2011)

Idée : moyenne pondérée des indices de sensibilité ponctuels $S_i(s)$

- ▶ valeurs de $Y(s)$ en **M points** $s_1, \dots, s_M$, pour **N runs**

Stratégie 2 : indices de sensibilité **agrégés**

Lamboni *et al.* (2011)

Idée : moyenne pondérée des indices de sensibilité ponctuels $S_i(s)$

- ▶ valeurs de $Y(s)$ en **M points** $s_1, \dots, s_M$, pour **N runs**
- ▶ **Analyse en Composantes Principales** du tableau $M \times N$
→ K composantes $Y^{(1)}, \dots, Y^{(K)}$ avec inerties $I_1, \dots, I_K$

Stratégie 2 : indices de sensibilité **agrégés**

Lamboni *et al.* (2011)

Idée : moyenne pondérée des indices de sensibilité ponctuels $S_i(s)$

- ▶ valeurs de $Y(s)$ en **M points** $s_1, \dots, s_M$, pour **N runs**
- ▶ **Analyse en Composantes Principales** du tableau $M \times N$
→ K composantes $Y^{(1)}, \dots, Y^{(K)}$ avec inerties $I_1, \dots, I_K$
- ▶ calcul des indices de sensibilité **pour chaque composante**

Stratégie 2 : indices de sensibilité **agrégés**

Lamboni *et al.* (2011)

Idée : moyenne pondérée des indices de sensibilité ponctuels $S_i(s)$

- ▶ valeurs de $Y(s)$ en **M points** $s_1, \dots, s_M$, pour **N runs**
- ▶ **Analyse en Composantes Principales** du tableau $M \times N$
 $\rightarrow K$ composantes $Y^{(1)}, \dots, Y^{(K)}$ avec inerties $l_1, \dots, l_K$
- ▶ calcul des indices de sensibilité **pour chaque composante**
- ▶ construction d'un **indicateur agrégé** $\mathbb{S}_i$

$$\mathbb{S}_i = \frac{1}{\sum_k l_k} \sum_{k=1}^K S_i(Y^{(k)}) \cdot l_k$$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

- sortie en **un point particulier** $s^* \in \mathcal{D} : Y^* = Y(s^*)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

- ▶ sortie en **un point particulier** $s^* \in \mathcal{D}$: $Y^* = Y(s^*)$
- ▶ sortie **agrégée** sur un certain **support spatial** $\nu \subset \mathcal{D}$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

- ▶ sortie en **un point particulier** $s^* \in \mathcal{D}$: $Y^* = Y(s^*)$
- ▶ sortie **agrégée** sur un certain **support spatial** $\nu \subset \mathcal{D}$
 - ▶ valeur min/max
 - ▶ valeur moyenne
 - ▶ etc.

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

- ▶ sortie en **un point particulier** $s^* \in \mathcal{D}$: $Y^* = Y(s^*)$
- ▶ sortie **agrégée** sur un certain **support spatial** $\nu \subset \mathcal{D}$
 - ▶ valeur min/max
 - ▶ valeur moyenne
 - ▶ etc.
- ▶ mesures de surface, de connexité, d'aggrégation, etc.

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

- ▶ sortie en **un point particulier** $s^* \in \mathcal{D}$: $Y^* = Y(s^*)$
- ▶ sortie **agrégée** sur un certain **support spatial** $\nu \subset \mathcal{D}$
 - ▶ valeur min/max
 - ▶ valeur moyenne
 - ▶ etc.
- ▶ mesures de surface, de connexité, d'aggrégation, etc.

→ indices de sensibilité $S_i(Y^*)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Ex : modèle MAPOD

- ▶ Y_1^* = taux moyen $\bar{\tau}$ de pollinisation OGM → non OGM
- ▶ Y_2^* = part des parcelles non-OGM t.q. $\tau < 0.9\%$
- ▶ Y_3^* = part des parcelles non-OGM t.q. $\tau < 0.1\%$

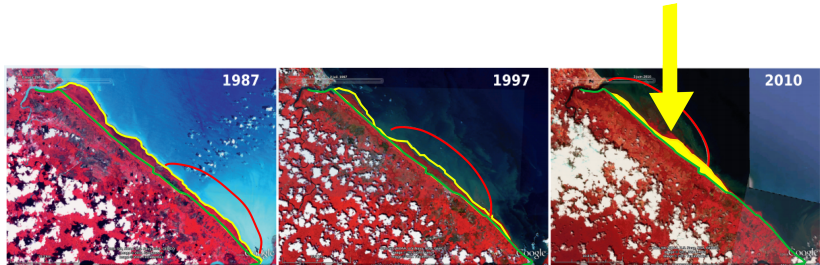


Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Ex : modèle OCELET

- $Y^* = \text{aire totale de la mangrove à } t_{\text{final}}$

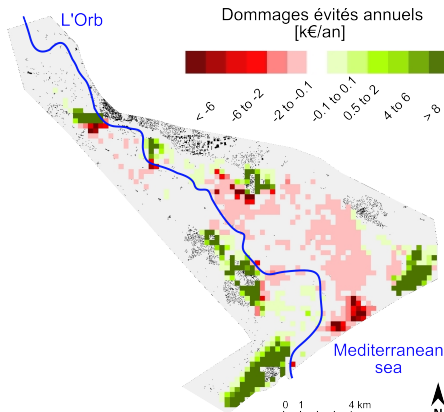


Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Ex : modèle NOE

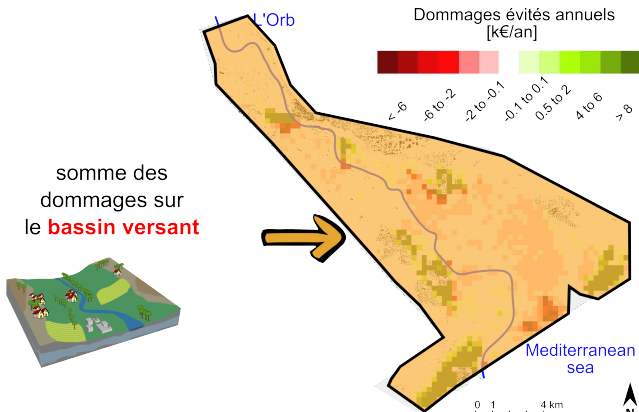
- ▶ Y_ν^* = somme des dommages sur une zone $\nu \subset \mathcal{D}$
- ▶ indice de sensibilité **zonaux** $S_Z(\nu)$ et $S_X(\nu)$



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Ex : modèle NOE

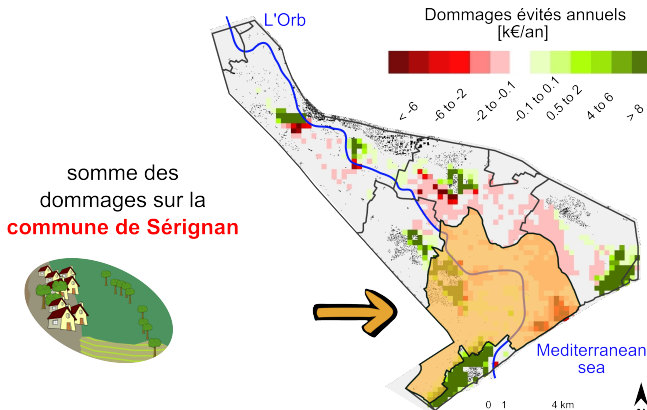
- ▶ Y_ν^* = somme des dommages sur une zone $\nu \subset \mathcal{D}$
- ▶ indice de sensibilité **zonaux** $S_Z(\nu)$ et $S_X(\nu)$



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Ex : modèle NOE

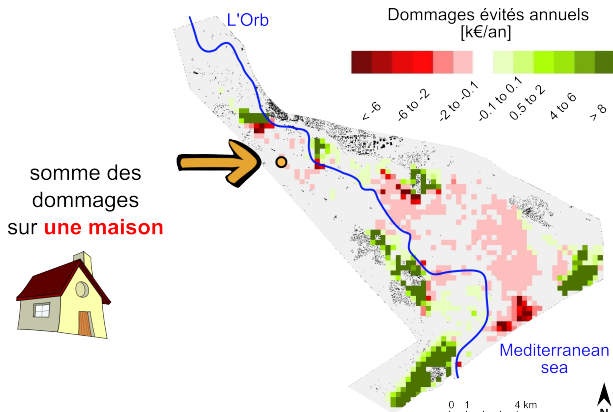
- ▶ Y_ν^* = somme des dommages sur une zone $\nu \subset \mathcal{D}$
- ▶ indice de sensibilité **zonaux** $S_Z(\nu)$ et $S_X(\nu)$



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Ex : modèle NOE

- ▶ Y_ν^* = somme des dommages sur une zone $\nu \subset \mathcal{D}$
- ▶ indice de sensibilité **zonaux** $S_Z(\nu)$ et $S_X(\nu)$



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support



une maison



commune de Sérignan



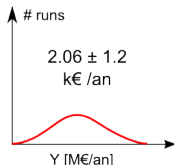
bassin versant

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

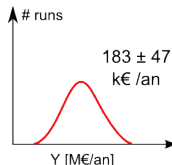
Changements d'échelle - effets de support



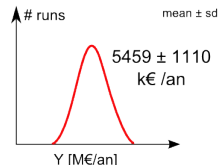
une maison



commune de Sérignan



bassin versant



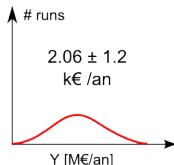
Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

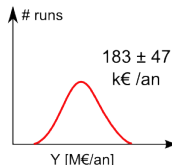
- **plus faible** coeff. de variation sur **une grande zone**



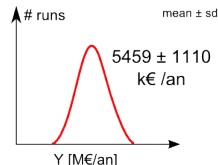
une maison



commune de Sérignan



bassin versant



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

- plus faible coeff. de variation sur une grande zone



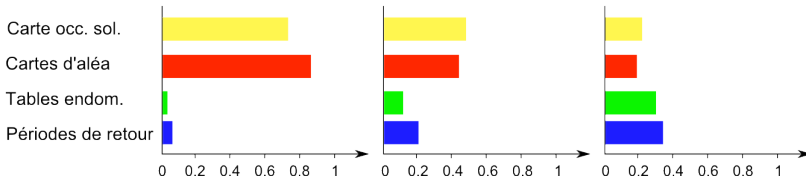
une maison



commune de Sérignan



bassin versant



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

- ▶ plus faible coeff. de variation sur une grande zone
- ▶ entrées spatialisées : $S_i(\text{bassin versant}) < S_i(\text{commune}) < S_i(\text{maison})$



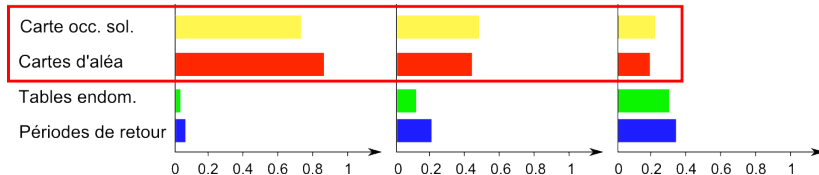
une maison



commune de Sérignan



bassin versant



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

- ▶ plus faible coeff. de variation sur une grande zone
- ▶ entrées spatialisées : $S_i(\text{bassin versant}) < S_i(\text{commune}) < S_i(\text{maison})$
- ▶ entrées non-spatialisées : $S_i(\text{bassin versant}) > S_i(\text{commune}) > S_i(\text{maison})$



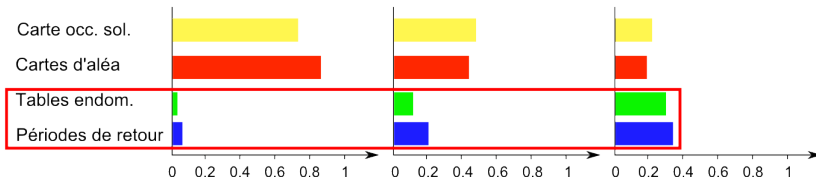
une maison



commune de Sérignan



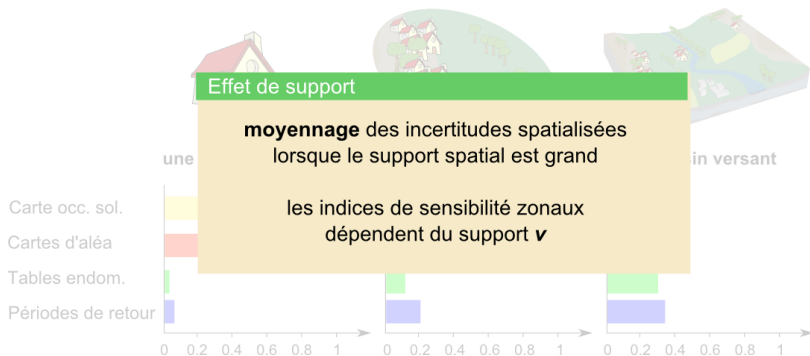
bassin versant



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

- ▶ plus faible coeff. de variation sur une grande zone
- ▶ entrées spatialisées : $S_i(\text{bassin versant}) < S_i(\text{commune}) < S_i(\text{maison})$
- ▶ entrées non-spatialisées : $S_i(\text{bassin versant}) > S_i(\text{commune}) > S_i(\text{maison})$



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

On a (pour un modèle *point-based*) :

$$\frac{S_Z(\nu)}{S_X(\nu)} = \frac{\nu_c}{|\nu|}$$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

On a (pour un modèle *point-based*) :

$$\frac{S_Z(\nu)}{S_X(\nu)} = \frac{\nu_c}{|\nu|}$$

Plus grand support $\nu \rightarrow$ moyennage des erreurs locales $\rightarrow$ faible $S_Z(\nu)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

On a (pour un modèle *point-based*) :

$$\frac{S_Z(\nu)}{S_X(\nu)} = \frac{\nu_c}{|\nu|}$$

Plus grand support $\nu \rightarrow$ moyennage des erreurs locales $\rightarrow$ faible $S_Z(\nu)$

Surface critique ν_c

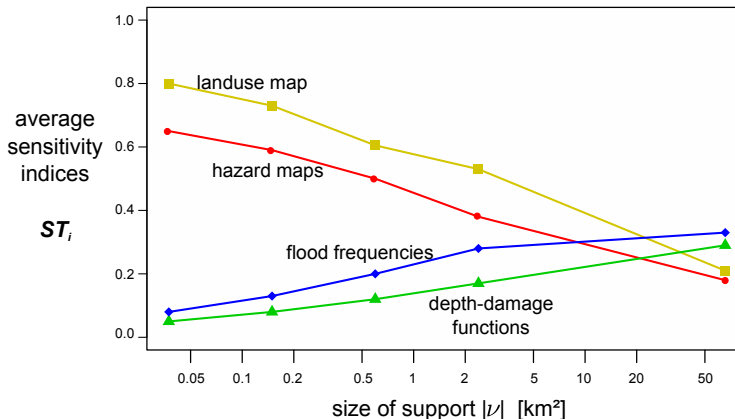
$$\nu_c = \frac{S_Z}{S_X} \cdot \phi[C(\cdot)]$$

indices de sensibilité
ponctuels

autocorrélation spatiale
de l'entrée $Z(s)$

Changements d'échelle - effets de support

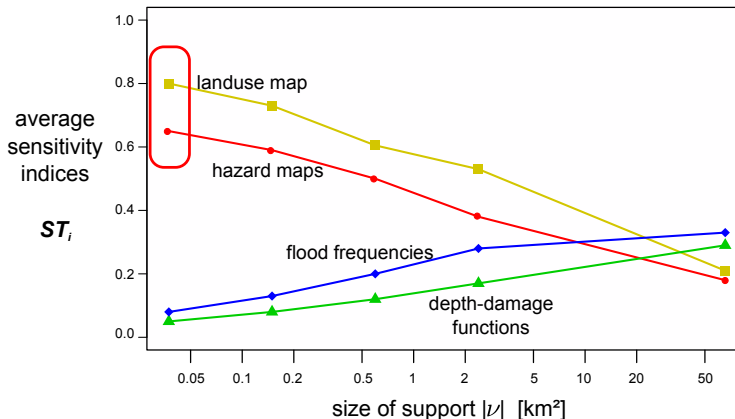
Illustration sur le modèle NOE



Changements d'échelle - effets de support

Illustration sur le modèle NOE

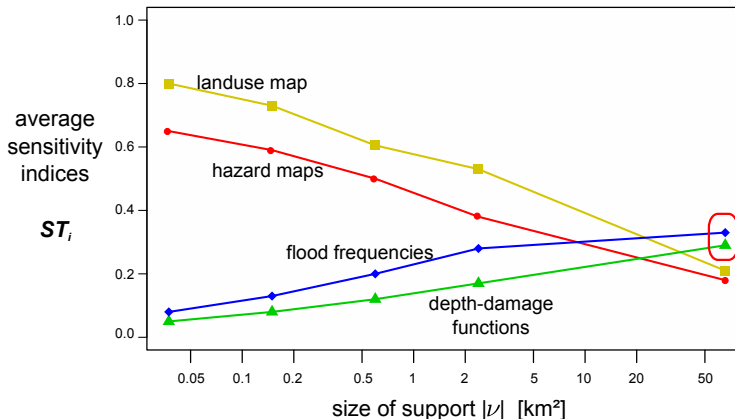
- variables clé à grande échelle : occ. sol et cartes d'aléa



Changements d'échelle - effets de support

Illustration sur le modèle NOE

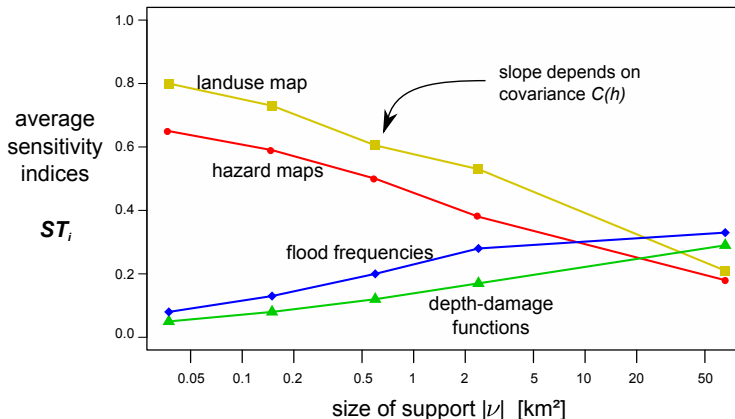
- ▶ variables clé à grande échelle : occ. sol et cartes d'aléa
- ▶ variables clé à petite échelle : périodes de retour



Changements d'échelle - effets de support

Illustration sur le modèle NOE

- ▶ variables clé à grande échelle : occ. sol et cartes d'aléa
- ▶ variables clé à petite échelle : périodes de retour



En conclusion

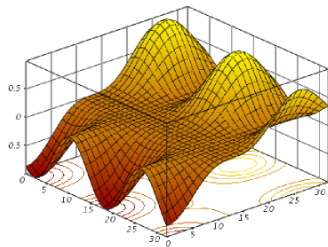
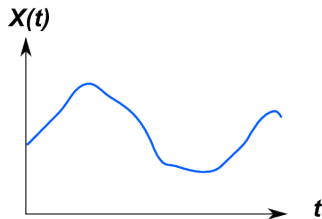
En conclusion...

En conclusion...

Extensions possibles

- ▶ entrées/sorties temporelles
- ▶ entrées fonctionnelles

entrée temporelle



entrée fonctionnelle

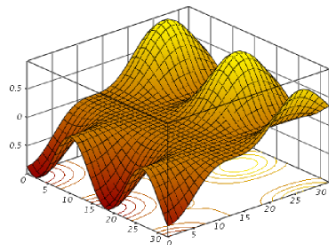
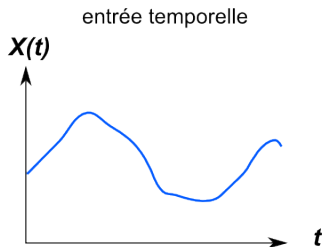
En conclusion...

Extensions possibles

- ▶ entrées/sorties temporelles
- ▶ entrées fonctionnelles

Mais...

- ▶ des « recettes » empiriques utiles pour la pratique
- ▶ besoin de meilleures assises théoriques



entrée fonctionnelle

Saint-Geours N. Analyse de sensibilité de modèles spatialisés - Application à l'analyse coût-bénéfice de projets de prévention des inondations, *Université Montpellier II*, 2013.

Analyse de sensibilité spatialisée

Nathalie Saint-Geours
iTK, Montpellier

Pec'num²⁰¹⁵

École Centrale de Lyon, 21 mai 2015

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

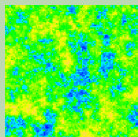
Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

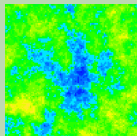
Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$



2D error field

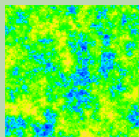
range a ↗
→



Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

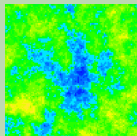
Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$



2D error field

range a ↗
→

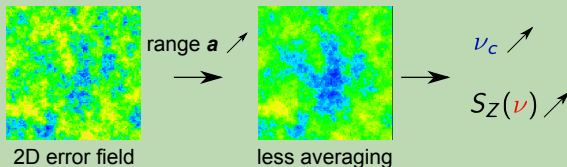


less averaging

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

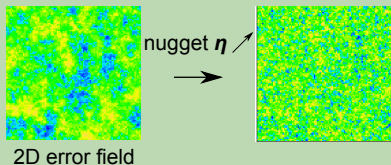
$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$



Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

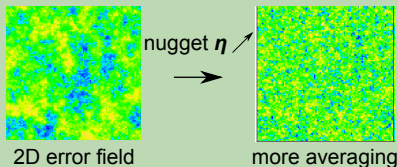
$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$



Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$



Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$

