

Ecole Pec'num 2015

Cours 1

Plans d'expérience

Screening

Walter TINSSON

Laboratoire de Mathématiques et
leurs Applications de Pau (LMAP)

LYON - Lundi 18 mai 2015

SOMMAIRE

Généralités	02
Plans factoriels complets	06
Plans factoriels fractionnaires (cas d'un générateur)	10
Plans factoriels fractionnaires (cas général)	16
Plans simples	22
Plans de Plackett et Burman	26
Extension : de l'ordre 1 vers l'ordre 2	29
Références	35

Généralités

On considère ici généralement une situation où un phénomène aléatoire dépend d'un **grand nombre de facteurs**. L'idée est d'alors utiliser un modèle simple, dit modèle de **screening** (*criblage en français*) afin de juger de l'effet ou non de chacun des facteurs.

En pratique on utilise souvent un modèle statistique de la forme $Y(x)=f(x)+\varepsilon(x)$, pour m facteurs, avec f polynôme d'ordre un donné en tout point du domaine expérimental par :

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_m) = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i$$

On dit que β_0 est l'effet **moyen général** alors que β_i est l'effet **linéaire** du facteur i .

Désignons par p le nombre de paramètres inconnus du modèle ($p=m+1$ ici). Il est donc nécessaire de réaliser $n \geq m+1$ expériences (le cas $n=m+1$ correspondant à un plan d'expérience **saturé**).

Lorsque n expériences sont réalisées ceci peut être traduit globalement via l'écriture matricielle du modèle :

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

On suppose classiquement que les résidus sont centrés, indépendants et homoscedastiques donc :

$$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$$

Le vecteur β des paramètres inconnus du modèle va être ajusté ici selon la technique des **moindres carrés** ayant pour objectif de minimiser l'erreur :

$$Q(\beta) = \|Y - X\beta\|^2$$

Si la matrice du modèle X est de plein rang l'estimateur des moindres carrés est obtenu via la résolution des **équations normales** suivantes :

$$\hat{\beta} = ({}^tXX)^{-1}{}^tXY$$

On montre que sa dispersion est quantifiée par :

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2 ({}^tXX)^{-1}$$

Objectif : pour n expériences utiliser le « **meilleur** » plan d'expérience possible.

L'idée est alors de rechercher un plan d'expérience optimal dans le sens où il va « **minimiser** » la matrice de dispersion $({}^tXX)^{-1}$.

Cette minimisation peut être obtenue selon divers ordres :

- minimisation de la trace (A-optimalité),
- minimisation du déterminant (D-optimalité),
- minimisation de la plus grande des valeurs propres (E-optimalité), etc ...

On définit alors l'optimalité dite **universelle** via la minimisation d'un critère très général obtenu à partir des valeurs propres de la matrice d'information tXX . L'optimalité universelle entraîne, entre autres, les A, D et E-optimalités.

PROPOSITION

Soit une classe de plans d'expérience $\mathcal{D}$ et C_d la matrice d'information de tout plan d'expérience d . S'il existe dans $\mathcal{D}$ un plan d'expérience d^* tel que :

- 1) C_{d^*} est multiple de l'identité,
- 2) $\text{Trace}(C_{d^*}) = \max_{d \in \mathcal{D}} \text{Trace}(C_d)$

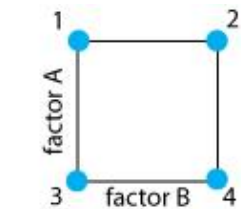
alors le plan d'expérience d^* est **universellement optimal** au sein de la classe $\mathcal{D}$.

Un plan d'expérience d pour lequel la matrice d'information C_d est diagonale est qualifié de plan d'expérience **orthogonal**.

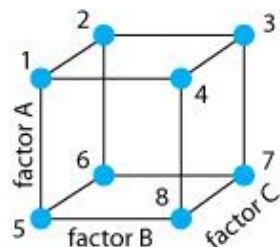
Plans factoriels complets

Objectif : rechercher une classe de plans d'expérience **orthogonaux** et simples à utiliser.

Pour 2 facteurs on réalise des expériences aux sommets du carré unité, pour 3 facteurs aux sommets du cube unité ... pour m facteurs aux sommets de l'hypercube unité.



factor levels		
trial	A	B
1	+	-
2	+	+
3	-	-
4	-	+



factor levels			
trial	A	B	C
1	+	-	-
2	+	-	+
3	+	+	+
4	+	+	-
5	-	-	-
6	-	-	+
7	-	+	+
8	-	+	-

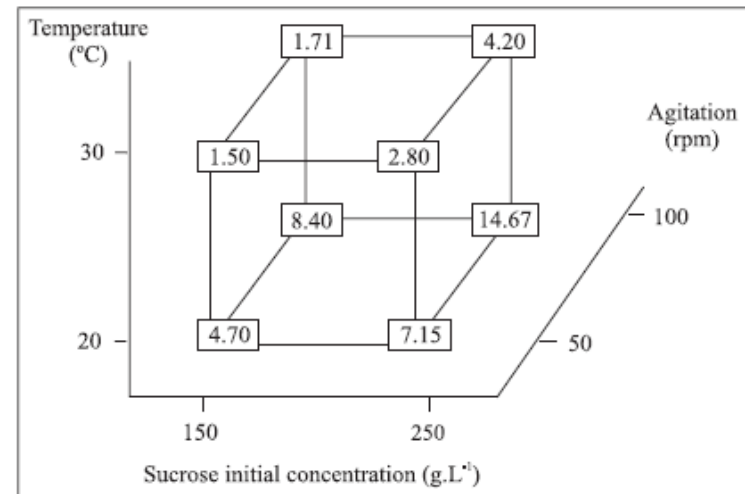


Figure 1. Geometrical representation of the results from the 2^3 design of levan production.

Exemple : plan factoriel complet à 3 facteurs (sans expériences centrales).

On veut alors ajuster le modèle :

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$$

Matriciellement il vient donc $Y = X\beta + \varepsilon$ avec (selon l'ordre de Yates) :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \end{pmatrix}$$

Une telle structure est bien **orthogonale** car :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tXX = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I_4$$

Il en découle que :

$$\hat{\beta} = ({}^tXX)^{-1}{}^tXY = \frac{1}{8}{}^tXY = \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ 1/8(-Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4 - Y_5 + Y_6 - Y_7 + Y_8) \\ 1/8(-Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4 - Y_5 - Y_6 + Y_7 + Y_8) \\ 1/8(-Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8) \end{pmatrix}$$

avec $V(\hat{\beta}) = \sigma^2({}^tXX)^{-1} = (\sigma^2/8)I_4$ donc :

$$\text{Var}(\widehat{\beta}_0) = \text{Var}(\widehat{\beta}_1) = \text{Var}(\widehat{\beta}_2) = \text{Var}(\widehat{\beta}_3) = \frac{\sigma^2}{8}$$

CAS GENERAL

Pour m facteurs un **plan factoriel complet** est constitué par l'ensemble de tous les sommets de l'hypercube $[-1, +1]^m$.

PROPOSITION

Tout plan factoriel complet pour m facteurs est **orthogonal** avec :

$$({}^tXX) = 2^m I_{m+1} \text{ donc } \hat{\beta} = \frac{1}{2^m} {}^tXY \text{ et } V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{2^m} I_{m+1}$$

Qualités de ces plans d'expérience : utilisation de seulement deux niveaux, simplicité de construction, orthogonalité.

Défaut de ces plans d'expérience : trop grande taille lorsque m augmente !



$$2^m \gg m + 1$$

Plans factoriels fractionnaires cas d'un générateur

Objectif : utiliser seulement **la moitié** des points du plan factoriel complet tout en conservant l'orthogonalité

Exemple : plan factoriel complet à 3 facteurs (sans expériences centrales). La matrice D du plan factoriel complet est :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

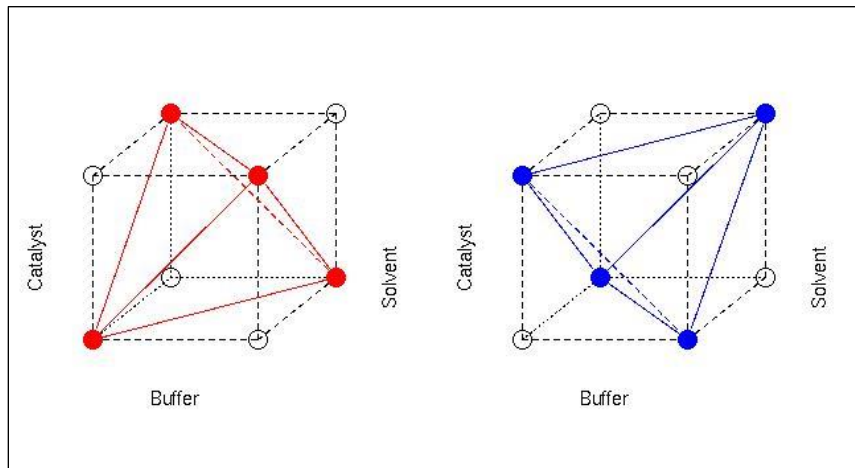
On sélectionne alors uniquement les 4 expériences surlignées.

Remarquons que les 4 expériences choisies sont les seules expériences du plan factoriel complet telles que **$x_1 x_2 x_3 = 1$** .

La matrice du modèle pour cette **fraction** (saturée) du plan complet est alors :

$$X = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Il en découle que ce plan d'expérience (deux fois moins coûteux que le plan factoriel complet) est encore **orthogonal** puisque ${}^tXX = 4I_4$.



Géométriquement l'ensemble des points vérifiant la relation $x_1x_2x_3 = 1$ est ici le sous-ensemble de sommets en rouge. Le choix symétrique en bleu est l'ensemble des points vérifiant la relation $x_1x_2x_3 = -1$.

NOTION DE PRODUIT D'HADAMARD

Pour deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ leur **produit d'Hadamard**, noté $u \odot v$, est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ obtenu par **produit terme à terme** des coordonnées de u et v :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_3 \end{pmatrix}$$

Propriétés (évidente) du produit d'Hadamard :

- 1) **associativité** : $u \odot (v \odot w) = (u \odot v) \odot w$
- 2) **commutativité** : $u \odot v = v \odot u$
- 3) **élément neutre** : $u \odot \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n \odot u = u$

Remarquons que si de plus $u \in \{-1, +1\}^n$ alors : $u \odot u = u^{\odot 2} = \mathbb{I}_n$

NOTATIONS ET DEFINITIONS

Convention 1 : désignons maintenant par **1,2,...,m** les vecteurs colonne de la matrice D du plan factoriel complet associés aux facteurs 1,2,...,m.

Convention 2 : étendons les notations multiplicatives au produit d'Hadamard, notons uv au lieu de $u \odot v$.

Les 4 expériences sélectionnées pour la **fraction régulière** du plan factoriel complet vérifient alors :

$$\mathbb{I}_4 = \mathbf{123}$$

On dit alors que cette fraction régulière est définie par le **générateur 123**.

$$D = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ -1 & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & -1 & -1 \\ -1 & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & -1 \\ -1 & -1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -1 & \mathbf{1} \\ -1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Problème : quelles conditions imposer à une fraction pour quelle soit orthogonale ?

DEFINITION

Pour toute fraction régulière définie à l'aide d'un seul générateur on appelle **résolution** la taille du générateur utilisé.

Remarquons que :

1) une fraction de résolution I est inutilisable car alors la colonne de β_0 et d'un des effets linéaires sont identiques dans X qui n'est pas de plein rang.

$$\mathbb{I}_4 = 2 \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) une fraction de résolution II est inutilisable car alors deux colonnes d'effets linéaires sont identiques dans X qui n'est pas de plein rang.

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_4 &= 12 \\ &\Leftrightarrow \\ 1\mathbb{I}_4 &= 1^2 2 \\ &\Leftrightarrow \\ 1 &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Généralisation de cette méthode :

PROPOSITION

Considérons un phénomène aléatoire dépendant de m facteurs, analysé à l'aide d'une fraction régulière définie à l'aide d'un seul générateur. Alors :

- 1) cette fraction régulière est **constituée** par $n = 2^{m-1}$ expériences,
- 2) si la fraction régulière est de **résolution III** (ou plus) alors elle constitue un plan d'expérience **orthogonal** avec explicitement :

$$t_{XX} = 2^{m-1} I_p \quad \text{donc} \quad \hat{\beta} = \frac{1}{2^{m-1}} t_{XY} \quad \text{et} \quad V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{2^{m-1}} I_p$$

Plans factoriels fractionnaires cas général

Considérons maintenant le cas général d'une fraction régulière définie par **q générateurs**.

Exemple : considérons $m=5$ facteurs et la fraction régulière définie par les $q=2$ générateurs

$$\mathbb{I} = \mathbf{123} = \mathbf{345}$$

Seules 8 expériences sont compatibles avec les deux générateurs (soit **le quart** du plan factoriel complet).

A partir de la matrice D on observe aussi la relation supplémentaire :

$$\mathbb{I}_8 = \mathbf{1245}$$

donc **1245** est un candidat générateur supplémentaire.



Il n'y a plus **unicité** dans le choix des deux générateurs.

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Remarquons que ce résultat était prévisible car :

$$\mathbb{I}_g = \mathbf{123} \text{ et } \mathbb{I}_g = \mathbf{345} \Rightarrow \mathbb{I}_g = (\mathbf{123})(\mathbf{345}) = \mathbf{123^245} = \mathbf{1245}$$

Ceci nous amène à définir l'ensemble de tous les candidats générateurs possibles :

DEFINITION

Considérons m facteurs et une fraction régulière obtenue à l'aide de q générateurs indépendants. On appelle **groupe des contrastes de définition** de cette fraction régulière le groupe G engendré par ses générateurs.

Exemple : soient $m=6$ facteurs la fraction régulière définie par :

$$\mathbb{I}_g = \mathbf{123456} = \mathbf{12} = \mathbf{56}$$

Le groupe des contrastes de définition est alors (multiplier les générateurs entre eux) :

$$G = \{\mathbb{I}_g, \mathbf{123456}, \mathbf{12}, \mathbf{56}, \mathbf{3456}, \mathbf{1234}, \mathbf{1256}, \mathbf{34}\}$$

PROPOSITION

Considérons m facteurs et une fraction régulière obtenue à l'aide de q générateurs indépendants. Son groupe des contrastes de définitions est alors un **groupe fini** de cardinal 2^q .

Comment généraliser maintenant la notion de résolution ?

PROPOSITION

Considérons m facteurs et une fraction régulière obtenue à l'aide de q générateurs indépendants. On appelle **résolution** de cette fraction la taille du plus petit des éléments du groupe G .

Exemple : pour la fraction régulière précédente telle que

$$G = \{\mathbb{I}_8, \mathbf{123456}, \mathbf{12}, \mathbf{56}, \mathbf{3456}, \mathbf{1234}, \mathbf{1256}, \mathbf{34}\}$$

La résolution est donc égale à 11.

Résultat général :

PROPOSITION

Considérons un phénomène aléatoire dépendant de m facteurs, analysé à l'aide d'une fraction régulière définie à l'aide de q générateurs. Alors :

- 1) cette fraction régulière est **constituée** par $n = 2^{m-q}$ expériences,
- 2) si la fraction régulière est de **résolution III** (ou plus) alors elle constitue un plan d'expérience **orthogonal** avec explicitement :

$$t_{XX} = 2^{m-q} I_p \quad \text{donc} \quad \hat{\beta} = \frac{1}{2^{m-q}} t_{XY} \quad \text{et} \quad V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{2^{m-q}} I_p$$

Utilisation pratique de ce type de plans d'expérience.

	p	Plan comp.	Frac. reg.	Générateurs
02 facteurs	3	4	×	×
03 facteurs	4	8	4	123
04 facteurs	5	16	8	1234
05 facteurs	6	32	8	124, 135
06 facteurs	7	64	8	124, 135, 236
07 facteurs	8	128	8	124, 135, 236, 1237
08 facteurs	9	256	16	125, 136, 147, 238
09 facteurs	10	512	16	125, 136, 147, 238, 249
10 facteurs	11	1024	16	125, 136, 147, 238, 249, 34 <u>10</u>
11 facteurs	12	2048	16	1235, 137, 1248, 12349, 12 <u>10</u> , 13 <u>11</u> , 2346
12 facteurs	13	4096	16	145, 179, 13 <u>10</u> , 16 <u>11</u> , 256, 24 <u>11</u> , 27 <u>12</u> , 367

Exemple : construction informatique de la matrice D de la fraction régulière pour $m=10$ facteurs et les $q=6$ générateurs proposés précédemment.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

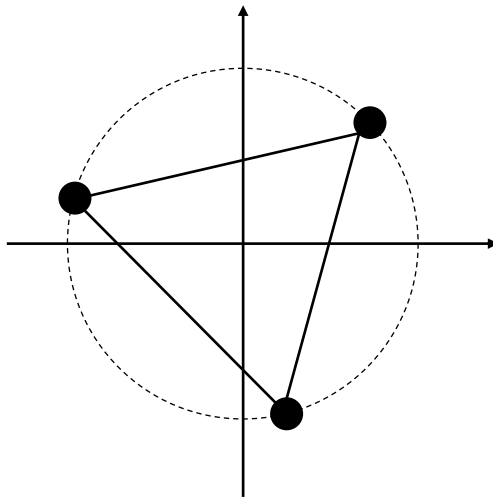
Plans simplexes

Objectif : construire des plans d'expérience **saturés** pour le modèle d'ordre un et **orthogonaux**.

Les configurations cherchées sont donc constituées par $n=m+1$ expériences et il est nécessaire que la matrice d'information tXX soit diagonale.

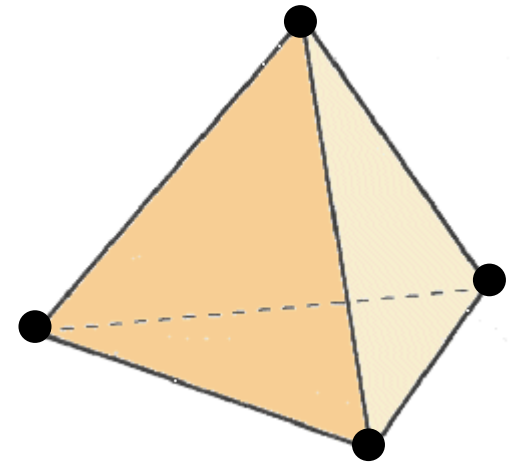
Solution pour $m=2$ facteurs :

sommets d'un
triangle
équilatéral.



Solution pour $m=3$ facteurs :

sommets d'un
tétraèdre
régulier.



Techniques de construction (exemples pour m=4 facteurs) :

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{5/2} & \sqrt{5/6} & \sqrt{5/12} & \sqrt{5/20} \\ -\sqrt{5/2} & \sqrt{5/6} & \sqrt{5/12} & \sqrt{5/20} \\ 0 & -2\sqrt{5/6} & \sqrt{5/12} & \sqrt{5/20} \\ 0 & 0 & -3\sqrt{5/12} & \sqrt{5/20} \\ 0 & 0 & 0 & -4\sqrt{5/20} \end{pmatrix}$$



Plan simplexe **classique**

Plan simplexe **cyclique**



$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0,309 & 0,619 & 1,309 & -1,309 \\ 0,619 & 1,309 & -1,309 & 0,309 \\ 1,309 & -1,309 & 0,309 & 0,619 \\ -1,309 & 0,309 & 0,619 & 1,309 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ 1 + 3\sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} & 1 + 3\sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & 1 + 3\sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & 1 + 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$



Plan simplexe **à trois niveaux**

DEFINITION GENERALE

Un plan d'expérience pour m facteur est un plan d'expérience **simplexe** si et seulement si $n=m+1$ et :

$\frac{1}{\sqrt{m+1}} X$ est une matrice **orthogonale**

Il en découle alors que la matrice d'information est donnée par :

$${}^tXX = (m + 1)I_n$$

Il en découle que si x_s et x_t sont deux points d'un plan simplexe alors :

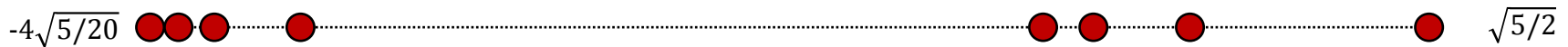
$$\|x_s\|^2 = \|x_t\|^2 = m \quad \text{et} \quad \langle x_s | x_t \rangle = -1$$

Géométriquement les points d'un plan simplexe sont donc les $(m+1)$ sommets d'un **simplexe régulier**.

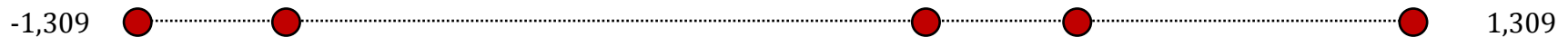
Qualités de ces plans d'expérience : taille minimale, orthogonalité.

Défauts de ces plans d'expérience : nombre de niveaux par facteur supérieur à deux, niveaux souvent complexes.

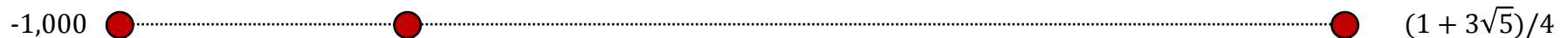
Niveaux distincts du plan simplexe classique (exemple précédant) :



Niveaux distincts du plan simplexe cyclique (exemple précédant) :



Niveaux distincts du plan simplexe à trois niveaux (exemple précédant) :



Plans de Plackett et Burman

Objectif : construire des plans d'expérience **saturés** pour le modèle d'ordre un, **orthogonaux**, et n'utilisant que **deux niveaux**.

L'idée est donc d'obtenir simultanément les propriétés intéressante des plans simples (saturation) et des fractions régulières (nombre minimal de niveaux).

Ce type de plan d'expérience ne peut exister que si le nombre de facteurs vérifie :

$$m \equiv 3 \pmod{4}$$

donc $m=3$, $m=7$, $m=11$, $m=15$ facteurs, etc ...

On montre que lorsque le nombre d'expériences $n=m+1$ est égal à une puissance de 2 alors un plan de Plackett et Burman peut être identifié à une **fraction régulière**.

Techniques de construction des plans de Plackett et Burman : même principe que pour les plans simplexes **cycliques** (mais en ne faisant intervenir que les valeurs +/- 1).

La matrice d'information de tout plan de Plackett et Burman est alors donnée par :

$${}^tXX = (m + 1)I_n$$

Qualités de ces plans d'expérience : taille minimale, orthogonalité, nombre minimal de niveaux par facteur.

Défauts de ces plans d'expérience : n'existent pas toujours !

Exemple de plan d'expérience de Plackett et Burman **construit** pour **m=11 facteurs**.

Dans cette situation une fraction régulière est constituée par n=16 expériences.

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	-	+	-	+	+	+	-	-	-	+	-
3	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-	+
4	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-
5	-	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-
6	-	-	+	-	-	+	-	+	+	+	-
7	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+	+
8	+	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+
9	+	+	-	-	-	+	-	-	+	-	+
10	+	+	+	-	-	-	+	-	-	+	-
11	-	+	+	+	-	-	-	+	-	-	+
12	+	-	+	+	+	-	-	-	+	-	-

Extension : de l'ordre 1 vers l'ordre 2

Que faire lorsqu'une étude via un plan d'expérience de **screening** (*i.e.* en ajustant un modèle d'ordre un) ne donne pas de bons résultats ?

On peut alors :

- 1) rajouter des facteurs,
- 2) modifier le domaine expérimental,
- 3) utiliser des modèles plus complexes, *etc* ...

Concernant le point 3 on enrichit alors classiquement le modèle d'ordre un soit en considérant un modèle à **effets d'interactions** (*i.e.* en ajustant un modèle d'ordre deux incomplet) soit en considérant un modèle pour **surfaces de réponse** (*i.e.* en ajustant un modèle d'ordre deux complet).

Concernant le modèle à effets d'interactions on s'intéresse à un modèle statistique de la forme $Y(x)=f(x)+\varepsilon(x)$, pour m facteurs, avec f polynôme d'ordre deux incomplet donné en tout point du domaine expérimental par :

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_m) = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j$$

On dit que β_0 est l'effet moyen général, β_i est l'effet linéaire du facteur i et β_{ij} est l'effet d'**interaction** entre les facteurs i et j .

Le nombre p de paramètres inconnus de ce modèle est égal à : $p = 1 + m + C_m^2$

Idée : réutiliser au mieux les structures développées pour le modèle de screening,

... plans factoriels complets

... fractions régulières de plans complets (mais de quelle résolution maintenant ?)

Exemple : plan factoriel complet à 3 facteurs (sans expériences centrales).

On veut alors ajuster le modèle :

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3$$

La matrice du modèle est :

$$X = \begin{matrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{12} & \mathbf{13} & \mathbf{23} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On vérifie que ${}^tXX = 8I_7$
donc le plan d'expérience
utilisé est bien **orthogonal**.

CAS GENERAL

Pour m facteurs considérons maintenant un plan factoriel complet pour l'ajustement du modèle à effets d'interactions. Alors :

PROPOSITION

Tout plan factoriel complet pour m facteurs est **orthogonal** avec :

$$({}^tXX) = 2^m I_p \text{ donc } \hat{\beta} = \frac{1}{2^m} {}^tXY \text{ et } \mathbb{V}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{2^m} I_p$$

Une nouvelle fois une telle structure est **optimale** pour bon nombre de critères d'efficacité classiques.

Ce type de plan d'expérience est de trop grande taille lorsque m devient grand puisqu'alors :

$$2^m \gg 1 + m + C_m^2$$

Objectif : n'utiliser alors qu'une fraction régulière du plan factoriel complet.

Quelle **résolution** faut-il considérer maintenant ?

1) une fraction de **résolution I ou II** est inutilisable car elle ne permet pas d'ajuster le sous-modèle d'ordre un.

2) une fraction de **résolution III** est inutilisable maintenant car alors un des effets linéaires est confondu avec un des effets d'interaction. Par exemple :

$$\mathbb{I}_4 = \mathbf{123} \Leftrightarrow \mathbf{1}\mathbb{I}_4 = \mathbf{1^223} \Leftrightarrow \mathbf{1} = \mathbf{23}$$

3) une fraction de **résolution IV** est inutilisable maintenant car alors deux effets linéaires sont confondus entre eux. Par exemple :

$$\mathbb{I}_4 = \mathbf{1234} \Leftrightarrow \mathbf{12}\mathbb{I}_4 = \mathbf{1^22^234} \Leftrightarrow \mathbf{12} = \mathbf{34}$$

CAS GENERAL

Considérons de manière générale un plan d'expérience fractionnaire pour l'ajustement du modèle à effets d'interactions. Alors :

PROPOSITION

Pour m facteurs et une fraction régulière définie à l'aide de q générateurs il vient :

- 1) cette fraction régulière est **constituée** par $n = 2^{m-q}$ expériences,
- 2) si la fraction régulière est de **résolution V** (ou plus) alors elle constitue un plan d'expérience **orthogonal** avec explicitement :

$$t_{XX} = 2^{m-q} I_p \quad \text{donc} \quad \hat{\beta} = \frac{1}{2^{m-q}} t_{XY} \quad \text{et} \quad V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{2^{m-q}} I_p$$

Références

Box G.E., Hunter J.S. et Hunter W.G. (2005), ***Statistics for experimenters***. Wiley Series in Probability and Statistics.

[chapitres 5,6,7]

Khuri A.I. et Cornell J.A. (1996), ***Response surfaces: designs and analyses***. Statistics: textbooks and monographs, Vol. 152, Marcel Dekker.

[chapitre 3]

Tinsson W. (2010), ***Plans d'expérience : constructions et analyses statistiques***. Mathématiques et Applications, Vol. 67, Springer.

[chapitre 3]

.....

Merci de votre attention

CONTACT

Walter TINSSON

Maître de Conférences HDR

Laboratoire de Mathématiques et de leurs
Applications de Pau (LMAP)

walter.tinsson@univ-pau.fr

Page Web : www.univ-pau.fr/~tinsson

