

Approches intrusives pour l'analyse de sensibilité

Alexandre Janon (Université Lyon 1,
ISFA)

École de printemps ASPEN

Avril 2013

- Sortie du modèle: $Y = f(\mathbf{X})$, où $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$.
- Paramètres d'entrée: variables aléatoires $X_1, \dots, X_p$ indépendantes.
- On souhaite évaluer numériquement les indices de Sobol:

$$\forall i = 1, \dots, p, \quad S_i = \frac{\mathbf{Var}(\mathbf{E}(Y|X_i))}{\mathbf{Var} Y},$$

ou, plus généralement, les indices *closed*:

$$\forall u \subset \{1, \dots, p\}, \quad S_u = \frac{\mathbf{Var}(\mathbf{E}(Y|X_i, i \in u))}{\mathbf{Var} Y},$$

qui permettent d'obtenir (par exemple) les indices totaux et tous les indices d'ordre supérieur.

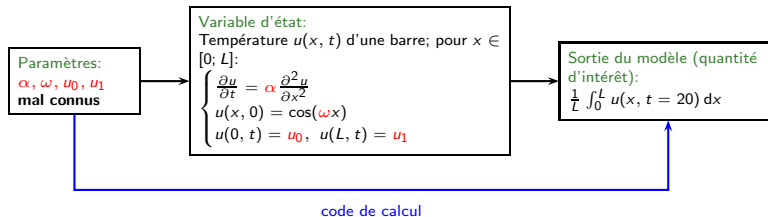
- Une méthode est **non-intrusive** si elle ne nécessite que la connaissance d'un échantillon (fini) de couples entrées-sorties de f :

$$\{(\mathbf{X}^1, f(\mathbf{X}^1)), \dots, (\mathbf{X}^n, f(\mathbf{X}^n))\},$$

et qu'elle ne fait aucune hypothèse structurelle sur f .

- Cadre bien adapté au calcul numérique.
- Une méthode **intrusive** suppose de plus que l'on a une information sur l'expression de $f(\mathbf{X})$ pour tout $\mathbf{X}$, même sous forme implicite.
 - *Inconvénient*: hypothèses supplémentaires, plus de travail théorique.
 - *Avantage*: on peut espérer être plus précis et plus performant, y compris en calcul numérique.

Contexte EDP paramétrique



- On suppose que: $f(\mathbf{X}) = \ell(u(\mathbf{X}, \cdot))$, où:
 - ℓ est une fonctionnelle,
 - $u(\mathbf{X}, \cdot)$ est une fonction, solution d'une EDP dont les paramètres sont les variables d'entrée ($\mathbf{X}$).

- Deux approches intrusives de calcul des indices de Sobol dans le cadre EDP paramétrique:
 - estimation Monte-Carlo avec métamodèle certifié (base réduite),
 - utilisation d'une décomposition en polynômes de chaos,et leurs avantages.
- Une approche (intrusive mais applicable dans un contexte plus général) permettant un gain en temps de calcul par l'utilisation d'un modèle grossier.

Partie 1: Estimation par Monte-Carlo et métamodèle certifié

Estimation de S_i par Monte-Carlo

- Soient $\{\mathbf{X}^k\}_{k=1,\dots,N}$ et $\{\mathbf{X}'^k\}_{k=1,\dots,N}$: deux échantillons iid de la loi de $\mathbf{X}$.
- On estime S_i par Monte-Carlo:

$$\hat{S}_i = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k y'_k - \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y'_k \right)}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k)^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \right)^2}$$

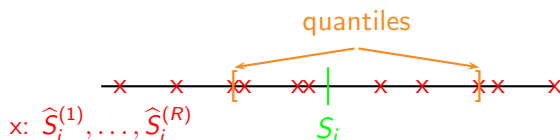
avec $y_k = f(\mathbf{X}^k)$, $y'_k = f(X_1'^k, X_2'^k, \dots, X_{i-1}'^k, X_i^k, X_{i+1}'^k, \dots, X_p'^k)$

- $\hat{S}_i$ converge p.s. vers S_i quand $N \rightarrow +\infty$.
→ Quantification de l'erreur d'échantillonnage $|S_i - \hat{S}_i|$?
- Le calcul de $\hat{S}_i$ nécessite $2N$ évaluations de f .
→ Comment réduire le temps nécessaire à chaque évaluation ?
- Remarque: cette méthode est **non-intrusive**.

Quantification de l'erreur Monte-Carlo

Approche "standard"

- $\hat{S}_i = \hat{S}_i(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E} = (\{\mathbf{X}^k\}, \{\mathbf{X}'^k\})$ désigne le couple d'échantillons de la loi de $\mathbf{X}$ choisis aléatoirement.
- Pour quantifier l'erreur entre $\hat{S}_i$ et S_i , on évalue $\hat{S}_i(\mathcal{E})$ pour plusieurs échantillons indépendants $\mathcal{E}^{(1)}, \dots, \mathcal{E}^{(R)}$.
- On obtient ainsi un ensemble de répliques $\mathcal{R} = \{\hat{S}_i^{(1)}, \dots, \hat{S}_i^{(R)}\}$ de $\hat{S}_i$.



- On en déduit un **intervalle de confiance (approché)** de niveau désiré.

Quantification de l'erreur Monte-Carlo

Approche bootstrap

- **Problème:** le calcul des R réplifications de $\hat{S}_i$ nécessite $2N \times R$ évaluations de la fonction f .

- Dans l'approche bootstrap:

- on tire un couple d'échantillons:

$$\mathcal{E} = (\{\mathbf{X}^k\}_{k=1,\dots,N}, \{\mathbf{X}'^k\}_{k=1,\dots,N})$$

- pour $r = 1, \dots, R$, on calcule la $r^{\text{ème}}$ réplification $\hat{S}_i^{(r)}$ sur le couple de *rééchantillons bootstrap*:

$$\mathcal{E}^{(r)} = (\{\mathbf{X}^k\}_{k \in L_r}, \{\mathbf{X}'^k\}_{k \in L_r})$$

où L_r est une *liste* tirée avec remise dans $\{1, \dots, N\}$;

- l'ensemble de réplifications est alors utilisé comme précédemment.
- Le calcul des R réplifications peut s'effectuer à partir des $2N$ évaluations de f sur les points contenus dans $\mathcal{E}$.

Quantification de l'erreur Monte-Carlo

Approche asymptotique

- On a un *théorème central limite*:

$$\sqrt{N}(\hat{S}_i - S_i) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_S^2),$$

où

$$\sigma_S^2 = \frac{\mathbf{Var}((Y - \mathbf{E}(Y))[(Y' - \mathbf{E}(Y)) - S_i(Y - \mathbf{E}(Y))])}{(\mathbf{Var} Y)^2},$$

pour: $Y' = f(X'_1, X'_2, \dots, X'_{i-1}, X_i, X'_{i+1}, \dots, X'_p)$, $\mathbf{X}'$ indépendante de même loi que $\mathbf{X}$.

- La variance asymptotique σ_S^2 peut être estimée naturellement, ce qui donne lieu à un intervalle de confiance asymptotique:

$$\left] \hat{S}_i \mp \frac{\hat{\sigma}_S}{\sqrt{N}} \right[$$

Quantification de l'erreur Monte-Carlo

Pourquoi le bootstrap est-il une bonne approximation ?

- Dans l'approche standard et l'approche bootstrap, chaque réplication est calculée à partir d'un couple d'échantillons de la loi de $\mathbf{X}$:

$$\widehat{S}_i^{(r)} = \widehat{S}_i(\mathcal{E}^{(r)})$$

- Les deux approches diffèrent au niveau de la façon dont est choisi $\mathcal{E}^{(r)}$:
 - Dans l'approche **standard**, $\mathcal{E}^{(r)}$ est un échantillon iid de la loi de $(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*)$, où $\mathbf{X}^*$ est indépendant de $\mathbf{X}$ et de même loi.
 - Dans l'approche **bootstrap**, $\mathcal{E}^{(r)}$ est un échantillon iid de la loi uniforme sur $\{(\mathbf{X}^k, \mathbf{X}'^k)\}_{k=1, \dots, N}$.
- Pour N assez grand, cette deuxième loi est une bonne approximation de la première.

- **Accélèrent** le calcul de la variable d'état u pour $K \gg 1$ valeurs du paramètre.
- Les K appels au code classique sont remplacés par deux phases:

Phase *offline*: faite une seule fois.

Collecte d' informations sur l'ensemble $\{u(\mathbf{X}); \mathbf{X} \in \mathcal{X}\}$ dans lequel vit la variable d'état.

Phase *online*: faite K fois.

Pour chaque valeur du paramètre, on utilise les données de la phase offline pour accélérer la résolution approchée de l'EDP.

- Intéressant si:

$$\textit{TempsOffline} + K \times \textit{TempsOnline} < K \times \textit{TempsClassique}$$

Métamodèles non intrusifs/intrusifs

- Dans cette approche la méthode d'estimation des indices de Sobol est non-intrusive.
- Lorsque l'on applique cette méthode d'estimation sur un métamodèle, le métamodèle peut être:
 - **non-intrusif**: on dispose seulement d'un échantillon $\{(\mathbf{X}_1, u(\mathbf{X}_1)), \dots, (\mathbf{X}_n, u(\mathbf{X}_n))\}$
 - $\pm$ Interpolation ou régression:
 - Krigage / interpolation par RKHS.
 - Décomposition en polynômes de chaos non intrusifs.
 - **intrusif**: on travaille sur l'équation satisfaite par la variable d'état.
 - Métamodèles par bases réduites.
- Dans la suite on considère la méthode base réduite.

Introduction aux bases réduites

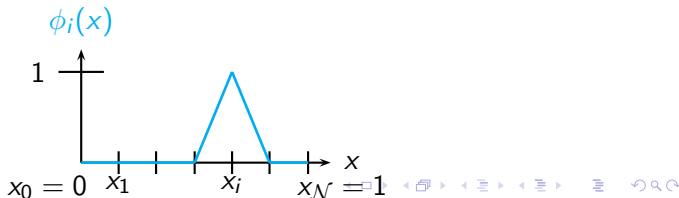
Résolution numérique classique en éléments finis

- Soit à trouver $u : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{cases} -u'' + u = \mu \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad \text{ie.} \quad \begin{cases} \int_0^1 u' v' + uv = \mu \int_0^1 v \quad \forall v \quad (*) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

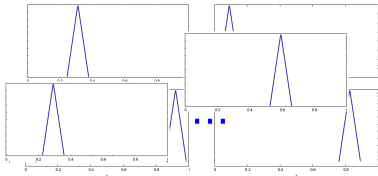
- **Résolution numérique:**

- on cherche u comme combinaison linéaire de $\mathcal{N}$ fonctions de base:
 $u = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}-1} u_i \phi_i$ satisfaisant $(*)$ pour $v = \phi_1, \dots, \phi_{\mathcal{N}-1}$.
- On obtient un système linéaire $\simeq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ en les u_i .



Métamodèle base réduite: principe

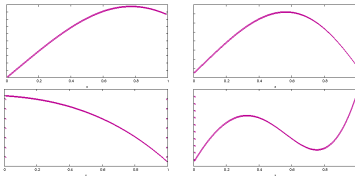
Code classique: u est cherché dans un **espace de grande dimension**, **non adapté** spécifiquement au problème.



$$u(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}-1} u_i(\mathbf{X}) \phi_i$$

inconnues

Métamodèle: $\tilde{u}$ est cherché dans un **espace de dimension plus petite**, **adapté** au problème.



$$\tilde{u}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i(\mathbf{X}) \zeta_i$$

inconnues

dépendent
du modèle;
à déterminer

Typiquement, en 1D: $\mathcal{N} \simeq 100$, $n \simeq 10$.

Base réduite: phases online et offline

- Phase offline:
 - Recherche de la base réduite $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$.
 - Préassemblage du système d'équations (parties indépendantes du paramètres).
- Phase online:
 - Assemblage et résolution du système linéaire $n \times n$.

Choix de la base réduite

Proper orthogonal decomposition (POD)

- On cherche une base *orthonormée* $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ de manière à minimiser:

$$\int_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}} \|u(\mathbf{X}) - \Pi_{\zeta_1, \dots, \zeta_n} u(\mathbf{X})\|^2 d\mathbf{X}$$

où $\Pi_{\zeta_1, \dots, \zeta_n}$ désigne le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$.

- En pratique on remplace l'intégrale à minimiser par une somme discrète:

$$\sum_{\mathbf{X} \in \Xi} \|u(\mathbf{X}) - \Pi_{\zeta_1, \dots, \zeta_n} u(\mathbf{X})\|^2$$

où Ξ est un échantillon fini de la loi de $\mathbf{X}$.

- On obtient alors un problème de minimisation sous contrainte, nécessitant le calcul de $u(\mathbf{X})$ pour $\mathbf{X} \in \Xi$ et la résolution d'un problème aux valeurs propres.

- On peut avoir une borne majorant l'erreur entre $u(\mathbf{X})$ et $\tilde{u}(\mathbf{X})$.
- Borne calculable explicitement, via une procédure offline/online efficace.
- Se traduit en une borne $\epsilon(\mathbf{X})$ sur l'erreur de la sortie réduite $\tilde{Y}$:

$$\left| Y(\mathbf{X}) - \tilde{Y}(\mathbf{X}) \right| \leq \epsilon(\mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{X}$$

- Une telle borne d'erreur *ne peut pas* s'obtenir à partir de méthodes non intrusives.
- Cependant**, certaines méthodes disposent d'indicateurs d'erreur *heuristiques*, qui peuvent être utilisés ici.

Retour à l'estimation des indices de Sobol

- On désire tenir compte:
 - de l'erreur d'échantillonnage
 - et de l'erreur due au métamodèle
- On remarque que l'estimateur est fonction des sorties du modèle:

$$\hat{S}_i = \Psi \left(\{y_k\}_{k=1,\dots,N}, \{y'_k\}_{k=1,\dots,N} \right)$$

- On a, pour tout k : $y_k \in [\tilde{y}_k - \epsilon_k; \tilde{y}_k + \epsilon_k]$ où $\tilde{y}_k = \tilde{Y}(\mathbf{x}_k)$, $\epsilon_k = \epsilon(\mathbf{x}_k)$; idem avec $'$.
- Pour:

$$\hat{S}_i^m = \min_{\substack{y_k \in [\tilde{y}_k - \epsilon_k; \tilde{y}_k + \epsilon_k], \\ y'_k \in [\tilde{y}'_k - \epsilon'_k; \tilde{y}'_k + \epsilon'_k]}} \Psi \left(\{y_k\}_{k=1,\dots,N}, \{y'_k\}_{k=1,\dots,N} \right)$$

$$\hat{S}_i^M = \max_{\substack{y_k \in [\tilde{y}_k - \epsilon_k; \tilde{y}_k + \epsilon_k], \\ y'_k \in [\tilde{y}'_k - \epsilon'_k; \tilde{y}'_k + \epsilon'_k]}} \Psi \left(\{y_k\}_{k=1,\dots,N}, \{y'_k\}_{k=1,\dots,N} \right)$$

Retour à l'estimation des indices de Sobol

- On a donc:

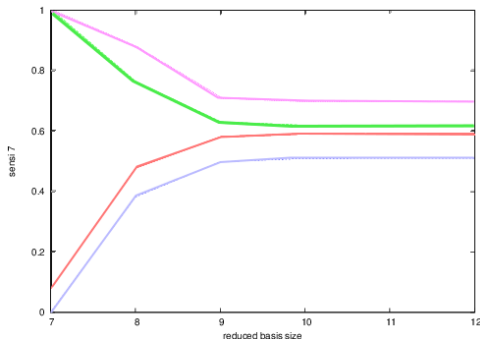
$$\hat{S}_i^m \leq \hat{S}_i \leq \hat{S}_i^M$$

bornes calculables à partir d'appels au
métamodèle et à sa borne d'erreur

- Bootstrap sur $\hat{S}_i^m$ et $\hat{S}_i^M \rightarrow$ **intervalles de confiance combinés** tenant compte:
 - de l'erreur d'échantillonnage
 - de l'erreur de métamodèle

Résultats numériques

- **EDP utilisée:** équation de Burgers dépendante du temps et 1D en espace.
- **Paramètres:** viscosité, coefficients de Fourier des conditions de bord et de la condition initiale.
- Intervalles de confiance obtenus pour un indice de Sobol, pour différentes tailles de bases réduites, à taille d'échantillon fixée :



Gains en temps de calcul

- **Comparaison avec l'estimation avec le code classique:**
gain d'un **facteur 5 à 6** en temps de calcul, à précision égale.
- **Comparaison avec une approche non intrusive:**
résultat **plus précis**, en un **temps plus court**.
- **On a tiré parti:**
 - des **propriétés du modèle**
 - du **travail théorique** nécessaire à la construction du métamodèle et de la borne d'erreur
- La méthode d'estimation est implémentée dans le package R *sensitivity* (fonction *sobolCert*).

Partie 2: Utilisation d'une décomposition en polynômes de chaos

- L'approche précédente estime les indices de Sobol par Monte-Carlo.
- **Avantages:**
 - **flexibilité** dans les *lois des paramètres* (variables d'entrée discrètes par ex.);
 - **vitesse de convergence** indépendante du nombre de paramètres;
 - méthode **statistique**: intervalles de confiance, bootstrap, TCL, efficacité asymptotique;
- **Inconvénient:**
 - La régularité de Y en fonction de $\mathbf{X}$ ne profite pas à la méthode d'estimation autant qu'elle le pourrait.
 - D'où vitesse de convergence **lente** et nécessité d'utiliser un grand échantillon.

Décomposition en polynômes de chaos

- **Hypothèse:** $X_1, \dots, X_p$ sont iid., gaussiennes centrées réduites.
- On peut dans certains cas s'y ramener.
- **Polynômes de Hermite en dimension 1:** famille $(\psi_n)_n$ telle que
 - $\deg \psi_n = n$
 - On a la relation d'orthogonalité:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x) \psi_m(x) w(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tous n et m entiers, où: $w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

- **Polynômes de Hermite en dimension p :** pour un multi-indice $i = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$, on note:

$$\psi_i(\mathbf{X}) = \psi_{i_1}(x_1) \cdots \psi_{i_d}(x_p)$$

le polynôme de Hermite à p variables d'ordre i .

Décomposition en polynômes de chaos (2)

- La **décomposition en polynômes de chaos (PCE)** de Y est:

$$Y(\mathbf{X}) = \sum_{i \in \mathbb{N}^p} y_i \psi_i(\mathbf{X})$$

où les $(y_i)_{i \in \mathbb{N}^p}$ sont les coefficients de Y dans sa décomposition.

- On peut exprimer les indices de Sobol en fonction de ces coefficients:

$$S_i = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} y_{I(j,i)}^2}{\sum_{j \in \mathbb{N}^p, j \neq 0} y_j^2} \approx \frac{\sum_{j=1}^P y_{I(j,i)}^2}{\sum_{j \in \mathbb{N}^p, 0 < |j| \leq P} y_j^2},$$

où $I(j, i) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, j, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-i})$, et P est un ordre de troncature (choisi par l'utilisateur).

- Dans la suite, nous allons voir comment calculer ces coefficients.

Calcul de la décomposition en polynômes de chaos

- Il existe des approches non intrusives pour approcher les coefficients de la PCE. Nous donnons l'idée d'une approche intrusive (Galerkin).

- On cherche u_{Trunc} (solution discrète) sous la forme:

$$u_{Trunc}(x, \mathbf{X}) = \sum_{i \in \mathbb{N}^p, |i| \leq P} u_i(x) \psi_i(\mathbf{X}),$$

où $u_i(\cdot) = \sum_{j=0}^{\mathcal{N}} u_{ij} \phi_j(\cdot)$ est une fonction d'un espace éléments finis,

- comme solution d'un problème faible discrétisé:

$$a(u_{Trunc}, v) = b(v) \quad \forall v \in \{(x, \mathbf{X}) \mapsto \phi_j(x) \psi_i(\mathbf{X}), i \in \mathbb{N}^p, |i| \leq P, j = 0, \dots, \mathcal{N}\}$$

où a et b dépendent de l'équation considérée.

- On obtient un système d'équations à

$$(\mathcal{N} + 1) \times \#\{i \in \mathbb{N}^p, |i| \leq P\} = (\mathcal{N} + 1) \times \frac{(p + P)!}{p! P!}$$

inconnues (les u_{ij}).

Remarques finales

- On peut alors en déduire la PCE de $Y_{Trunc}(\mathbf{X}) = \ell(u_{Trunc}(\cdot, \mathbf{X}))$; par exemple si ℓ est linéaire:

$$\begin{aligned} u_{Trunc}(x, \mathbf{X}) &= \sum_{i \in \mathbb{N}^p, |i| \leq P} \sum_{j=0}^{\mathcal{N}} u_{ij} \phi_j(x) \psi_i(\mathbf{X}) \\ \implies Y_{Trunc}(\mathbf{X}) &= \sum_{i \in \mathbb{N}^p, |i| \leq P} \underbrace{\sum_{j=0}^{\mathcal{N}} u_{ij} \ell(\phi_j)}_{=y_i} \psi_i(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

- Le système d'équations donnant les (u_{ij}) est en général très coûteux à résoudre.
- Certaines méthodes de réduction *a priori* (telles que la GSD) tentent de réduire le nombre d'inconnues du système en remplaçant les $\{\phi_j\}$ et les $\{\psi_i\}$ par des fonctions "bien choisies".

Partie 3: Réduction de variance pour l'estimation des indices de Sobol

Motivation

- L'approche de la partie 1 s'interdit tout appel au “vrai” modèle f lors de l'estimation de l'indice de sensibilité.
- Ceci a pour conséquence de “biaiser” l'estimation de S_i et ce biais doit être contrôlé au travers d'une borne d'erreur fournie par le métamodèle.
- Une alternative serait de s'autoriser à faire des appels (le moins possible) à f .
- Plus généralement, le métamodèle peut être pris égal à une version “dégradée” de f :
 - solution d'une optimisation numérique arrêtée avant convergence complète;
 - solution numérique d'EDP discrétisée sur un maillage plus grossier;
 - intégration numérique sur maillage plus grossier;
 - solution analytique approchée...

Estimateur multifidélité

- On note f_c une version *grossière* de f mais plus rapide à évaluer.
- On pose: $Y_c = f_c(\mathbf{X})$, $Y'_c = f_c(X'_1, \dots, X'_{i-1}, X_i, X'_{i+1}, \dots, X'_p)$.
- On se donne une fonction $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, et on note, pour $N \in \mathbb{N}$:
 - $\hat{T}_i^c$ l'estimateur de S_i^c sur f_c (avec taille d'échantillon N)
 - $\hat{T}_i^{c\Psi}$ l'estimateur de S_i^c sur f_c (avec taille d'échantillon $\Psi(N)$)
 - $\hat{T}_i^\Psi$ l'estimateur de S_i sur f (avec taille d'échantillon $\Psi(N)$).
- On considère l'estimateur suivant pour S_i :

$$\hat{V}_{i,N} = \hat{T}_i^c + \hat{T}_i^\Psi - \hat{T}_i^{c\Psi}$$

qui est consistant dès que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \Psi(N) = +\infty$.

(Variable de contrôle avec “recentrage empirique”).

Normalité asymptotique

- Supposons $\lim_{N \rightarrow +\infty} \Psi(N) = +\infty$. Alors, pour tout α_c et tout α_e dans $]0, 1[$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P \left(\left| S_i - \hat{V}_{i,N} \right| \leq q(\alpha_e) \frac{\sigma_e}{\sqrt{\psi(N)}} + q(\alpha_c) \frac{\sigma_c}{\sqrt{N}} \right) \geq 1 - (\alpha_e + \alpha_c),$$

où:

$$q(a) = \Phi^{-1}(1 - a/2) \quad (\Phi : \text{fdr d'une } \mathcal{N}(0, 1)), \quad \sigma_c^2 = \frac{\text{Var}(A_c - B_c/2)}{(\text{Var} Y_c)^2}$$

$$\sigma_e^2 = \sigma_c^2 + \frac{\text{Var}(A - B/2)}{(\text{Var} Y)^2} - \frac{2\text{Cov}(A, A_c) - (\text{Cov}(A, B_c) + \text{Cov}(B, A_c)) + \text{Cov}(B, B_c)/2}{\text{Var} Y \text{Var} Y_c},$$

où A, B, A_c, B_c sont:

$$A = (Y - \mathbf{E}(Y))(Y' - \mathbf{E}(Y)), \quad B = S_i [(Y - \mathbf{E}(Y))^2 + (Y' - \mathbf{E}(Y))^2],$$

$$A_c = (Y_c - \mathbf{E}(Y_c))(Y'_c - \mathbf{E}(Y_c)), \quad B_c = S_i^c [(Y_c - \mathbf{E}(Y_c))^2 + (Y'_c - \mathbf{E}(Y_c))^2].$$

Choix de Ψ , α_c et α_e en pratique

- On se donne un seuil de risque $\alpha \in]0, 1[$, ainsi qu'une longueur cible L pour l'intervalle de confiance pour S_j .
- On suppose qu'un appel à f a un coût 1, un appel à f_c a un coût $\rho < 1$ (connu).
- Cas "hiérarchique": un appel à f fournit également f_c .
- On cherche $\Psi(N) = \mu N$, avec $\mu < 1$ inconnu.
- On doit prendre:

$$\alpha_c = 1 - (\alpha + \alpha_e), \quad N \geq N^* = \frac{4}{L^2} \left(\frac{q(\alpha_e)\sigma_e}{\sqrt{\mu}} + q(\alpha_c)\sigma_c \right)^2$$

- L'estimateur $\hat{V}_{i, \lceil N^* \rceil}$ a un coût:
 - $2(\mu + \rho)\lceil N^* \rceil$ dans le cas hiérarchique;
 - $2(\mu + 2\rho)\lceil N^* \rceil$ dans les autres cas.

Exemple numérique

- $(S_t)_t$: processus (sous Q) donné par le modèle d'Heston (volatilité stochastique):

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t^1 \\ d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t) dt + \xi \sqrt{\nu_t} dW_t^2 \end{cases},$$

- Quantité d'intérêt: $e^{-RT} \mathbf{E}((S_T - K)_+)$, approchée de manière grossière et de manière fine:

$$f_c(\nu_0, \kappa, \theta, r, \xi, R, S_0, T, K) = \frac{e^{-RT}}{m} \sum_{j=1}^m (S_{T,j} - K)_+,$$

$$f(\nu_0, \kappa, \theta, r, \xi, R, S_0, T, K) = \frac{e^{-RT}}{M} \sum_{j=1}^M (S_{T,j} - K)_+$$

où $\{(S_{t,j})_t\}_{j=1,\dots,M}$ est un échantillon simulé de trajectoires discrétisées de (S_t) .

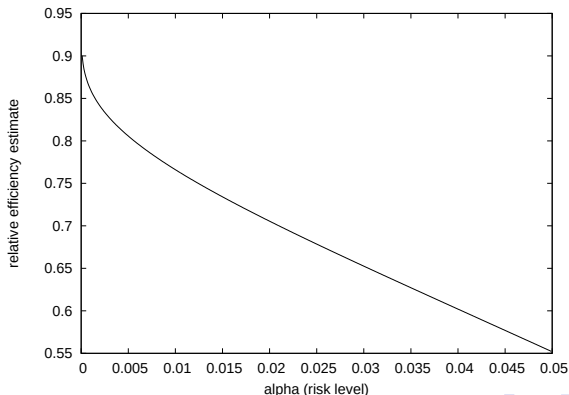
- On prend $M = 10000$, on fixe $T = 0.25$, $K = 30$ ainsi que les lois des paramètres restants. On considère l'estimation de S_{ν_0} .

Exemple numérique: gain en temps de calcul

On trace le ratio d'efficacité:

$$1 - \frac{\text{coût de l'estimateur multifidélité}}{\text{coût de l'estimateur sur le modèle } f}$$

en fonction du niveau de risque α , ce ratio ne dépendant pas de la longueur cible L .



Conclusion

- Nous avons vu trois méthodes de calcul des indices de Sobol sur codes coûteux:
 - non-intrusif pour l'estimation / métamodèle intrusif certifié ou non-intrusif borne heuristique;
 - polynômes de chaos intrusifs;
 - non-intrusif pour l'estimation / métamodèle utilisé conjointement avec le "vrai" modèle.
- Chacune de ces méthodes a son degré d'intrusivité et ses performances particulières (gain en temps de calcul, précision, rigueur de l'estimation d'erreur).

- **Référence de base:** Nguyen, Veroy, Patera, Certified real-time solution of parametrized partial differential equations, Handbook of material modelling (2005).
- **Equations plus complexes (non-linéarité, dépendance en temps...):**
 - Janon, Nodet, Prieur, Certified reduced basis solutions of viscous Burgers equation parametrized by initial and boundary values (2010).
 - Grepl, Reduced-Basis Approximation and A Posteriori Error Estimation for Parabolic Partial Differential Equations (2005).
 - Grepl, Maday et al. Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations (2007).
- **Application à l'analyse de sensibilité (inclut le cas borne heuristique RKHS/Krigeage):** Janon, Nodet, Prieur, Uncertainties assessment in global sensitivity indices estimation from metamodels, 2011.

● Références Partie 2:

- *Polynômes de chaos*: Ghanem, Spanos, Stochastic finite elements : a spectral approach.
- *Application à l'analyse de sensibilité*: Sudret, Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions (2008).
- *Méthode GSD*: Nouy et al. Generalized spectral decomposition for stochastic nonlinear problems (2009).

● Référence Partie 3: Janon A., Multifidelity variance reduction for pick-freeze Sobol index estimation, 2013. (Version préliminaire).