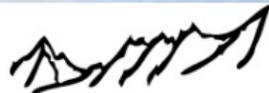




ÉCOLE DE PHYSIQUE  
des HOUCHES

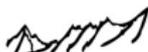


# Méthode adjointe pour l'analyse de sensibilité



Eric Blayo

Université de Grenoble et INRIA



# Cadre général

On considère un modèle complexe.

- ▶ Une mesure de la sensibilité d'une sortie  $S$  par rapport à une entrée  $E$  est  $\frac{dS}{dE}$  (ou  $\nabla_E S$ , ou  $\frac{\partial S}{\partial E}$ )

- ▶ Cette mesure est **locale** : le gradient est calculé autour de la valeur courante de  $E$



- ▶ Les **difficultés** :
  - ▶ au niveau continu : les entrées sont en général des fonctions
  - ▶ au niveau discret : les systèmes sont de grande dimension
  - ▶ la dépendance  $S(E)$  peut être (bien) cachée
- ▶ La **méthode adjointe** peut résoudre efficacement ces difficultés en fournissant un **gradient exact** pour un **coût indépendant de la dimension** des entrées.

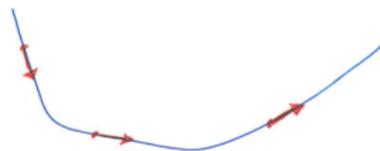


# Cadre général

On considère un modèle complexe.

- ▶ Une mesure de la sensibilité d'une sortie  $S$  par rapport à une entrée  $E$  est  $\frac{dS}{dE}$  (ou  $\nabla_E S$ , ou  $\frac{\partial S}{\partial E}$ )

- ▶ Cette mesure est **locale** : le gradient est calculé autour de la valeur courante de  $E$



- ▶ Les **difficultés** :
  - ▶ au niveau continu : les entrées sont en général des fonctions
  - ▶ au niveau discret : les systèmes sont de grande dimension
  - ▶ la dépendance  $S(E)$  peut être (bien) cachée
- ▶ La **méthode adjointe** peut résoudre efficacement ces difficultés en fournissant un **gradient exact** pour un **coût indépendant de la dimension** des entrées.

**Objectif :** présenter la méthode adjointe et quelques exemples

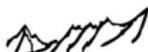


# Plan

Quelques rappels

La méthode adjointe

Quelques exemples



# Rappel : produits scalaires et normes

$$u : \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{x} \longrightarrow u(\mathbf{x}) \end{array}$$

$$u \in L^2(\Omega)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

- ▶ **Produit scalaire  $L^2$  (ou euclidien) :**

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- ▶ **Norme associée :**

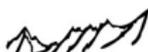
$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- ▶ **Produit scalaire euclidien :**

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

- ▶ **Norme associée :**

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i^2$$



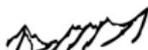
# Rappel : dérivées et gradients

$$f : E \longrightarrow \mathbf{R} \quad (E \text{ de dimension finie ou infinie})$$

- **Dérivée directionnelle (ou de Gâteaux)** de  $f$  au point  $x \in E$  dans la direction  $d \in E$  :

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x) = \hat{f}[x](d) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha}$$

**Exemple** : les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  sont les dérivées directionnelles dans les directions de la base canonique.



## Rappel : dérivées et gradients

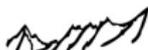
$$f : E \longrightarrow \mathbf{R} \quad (E \text{ de dimension finie ou infinie})$$

- **Gradient (ou dérivée de Fréchet)** :  $E$  étant un espace de Hilbert ,  $f$  est Fréchet-différentiable au point  $x \in E$  ssi

$$\exists p \in E \text{ tel que } f(x + h) = f(x) + (p, h) + o(\|h\|) \quad \forall h \in E$$

$p$  est la **dérivée** ou **gradient** de  $f$  au point  $x$ , noté  $f'(x)$  ou  $\nabla f(x)$ .

- $h \rightarrow (p(x), h)$  est une fonction **linéaire**, appelée **différentielle** ou **fonction linéaire tangente** ou **Jacobienne** de  $f$  au point  $x$



## Rappel : dérivées et gradients

$$f : E \longrightarrow \mathbf{R} \quad (E \text{ de dimension finie ou infinie})$$

- **Gradient (ou dérivée de Fréchet)** :  $E$  étant un espace de Hilbert ,  $f$  est Fréchet-différentiable au point  $x \in E$  ssi

$$\exists p \in E \text{ tel que } f(x + h) = f(x) + (p, h) + o(\|h\|) \quad \forall h \in E$$

$p$  est la **dérivée** ou **gradient** de  $f$  au point  $x$ , noté  $f'(x)$  ou  $\nabla f(x)$ .

- $h \rightarrow (p(x), h)$  est une fonction **linéaire**, appelée **différentielle** ou **fonction linéaire tangente** ou **Jacobienne** de  $f$  au point  $x$

Une relation (quasi) évidente mais très importante

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x) = (\nabla f(x), d)$$

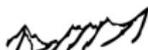


## Dépendance cachée

Le calcul de  $\nabla S(E)$  peut être difficile si la dépendance de  $S$  par rapport à  $E$  est indirecte.

### Exemple :

- ▶  $u(x, y, z, t)$  solution d'une EDP
- ▶  $K(x, y, z)$  un coefficient de cette EDP
- ▶  $S(K) = \frac{1}{2} \int_{x,y,z,t} u^2$



## Dépendance cachée

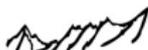
Le calcul de  $\nabla S(E)$  peut être difficile si la dépendance de  $S$  par rapport à  $E$  est indirecte.

### Exemple :

- ▶  $u(x, y, z, t)$  solution d'une EDP
- ▶  $K(x, y, z)$  un coefficient de cette EDP
- ▶  $S(K) = \frac{1}{2} \int_{x,y,z,t} u^2$

$$\hat{S}[K](k) = (\nabla S(K), k) = \int_{x,y,z,t} \hat{u} u$$

$$\text{avec } \hat{u} = \frac{\partial u}{\partial k}(K) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{u_{K+\alpha k} - u_K}{\alpha}$$



# Gradient et taux d'accroissement

En grande dimension, il est souvent difficile (voire impossible) d'obtenir le gradient par calcul de taux d'accroissement.

**Exemple :**

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = M(\mathbf{x}(t)) & t \in [0, T] \\ \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{e} \end{cases} \quad \text{avec } \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

$$S(\mathbf{e}) = \int_0^T F(\mathbf{x}(t)) \quad \longrightarrow \text{demande un run du modèle}$$

$$\nabla S(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial e_1}(\mathbf{e}) \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial e_d}(\mathbf{e}) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} [S(\mathbf{e} + \alpha \mathbf{i}_1) - S(\mathbf{e})] / \alpha \\ \vdots \\ [S(\mathbf{e} + \alpha \mathbf{i}_d) - S(\mathbf{e})] / \alpha \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow d + 1$  runs du modèle



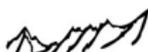
# Gradient et taux d'accroissement

En grande dimension, il est souvent difficile (voire impossible) d'obtenir le gradient par calcul de taux d'accroissement.

Pour des applications comme la météorologie ou l'océanographie,  $d = [\mathbf{e}] = \mathcal{O}(10^6 - 10^9)$   $\rightarrow$  cette méthode est inutilisable.

La méthode adjointe peut être une alternative efficace pour calculer  $\nabla S$ .

Lions, J.-L. : *Optimal control of systems governed by partial differential equations*.  
Springer-Verlag, 1971.



## Gradient et taux d'accroissement

En grande dimension, il est souvent difficile (voire impossible) d'obtenir le gradient par calcul de taux d'accroissement.

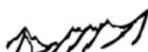
Pour des applications comme la météorologie ou l'océanographie,  $d = [\mathbf{e}] = \mathcal{O}(10^6 - 10^9)$   $\rightarrow$  cette méthode est inutilisable.

La méthode adjointe peut être une alternative efficace pour calculer  $\nabla S$ .



Si la variable d'entrée est de petite dimension ( $< 10$ ),  $\nabla S$  peut facilement être calculé par taux d'accroissement. Utiliser la méthode adjointe serait contre-productif.

Lions, J.-L. : *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Springer-Verlag, 1971.



# Rappel sur la notion d'adjoint

## Opérateur adjoint

Soient  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux espaces préhilbertiens (i.e. des espaces vectoriels munis de produits scalaires).

Soit  $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$  un opérateur. L'opérateur adjoint  $A^* : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$  est défini par :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}, \quad \langle Ax, y \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle x, A^*y \rangle_{\mathcal{X}}$$

Si  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont des espaces de Hilbert et si  $A$  est linéaire, alors  $A^*$  existe (et est unique).



# Rappel sur la notion d'adjoint

## Opérateur adjoint

Soient  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux espaces préhilbertiens (i.e. des espaces vectoriels munis de produits scalaires).

Soit  $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$  un opérateur. L'opérateur adjoint  $A^* : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$  est défini par :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}, \quad \langle Ax, y \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle x, A^*y \rangle_{\mathcal{X}}$$

Si  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont des espaces de Hilbert et si  $A$  est linéaire, alors  $A^*$  existe (et est unique).

## Opérateur adjoint en dimension finie

$A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$  un opérateur linéaire (i.e. une matrice). Alors son opérateur adjoint  $A^*$  (pour les normes euclidiennes) est  $A^T$ .

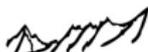


# Plan

Quelques rappels

La méthode adjointe

Quelques exemples

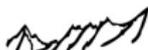


# Un exemple simple : cas continu

## Le modèle

$$\begin{cases} -b u''(x) + c u'(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad x \in ]0, 1[ \quad \text{où } f \in L^2(]0, 1[)$$

- ▶ **Entrée** : les coefficients  $b$  et  $c$
- ▶ **Sortie** :  $S(b, c) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x) dx$



# Un exemple simple : cas continu

## Le modèle

$$\begin{cases} -b u''(x) + c u'(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad x \in ]0, 1[ \quad \text{où } f \in L^2(]0, 1[)$$

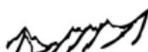
▶ **Entrée** : les coefficients  $b$  et  $c$

▶ **Sortie** :  $S(b, c) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x) dx$

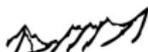
$\nabla S \rightarrow$  **dérivée de Gâteaux** :  $\hat{S}[b, c](\delta b, \delta c) = \langle \nabla S(b, c), (\delta b, \delta c) \rangle$

$$\hat{S}[b, c](\delta b, \delta c) = \int_0^1 \hat{u}(x) u(x) dx \quad \text{où } \hat{u} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{u_{b+\alpha\delta b, c+\alpha\delta c} - u_{b, c}}{\alpha}$$

Quelle est l'équation vérifiée par  $\hat{u}$  ?



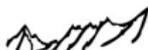
$$\begin{cases} -b \hat{u}''(x) + c \hat{u}'(x) = \delta b u''(x) - \delta c u'(x) & x \in ]0, 1[ \\ \hat{u}(0) = \hat{u}(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{modèle linéaire} \\ \text{tangent} \end{array}$$



$$\begin{cases} -b \hat{u}''(x) + c \hat{u}'(x) = \delta b u''(x) - \delta c u'(x) & x \in ]0, 1[ \\ \hat{u}(0) = \hat{u}(1) = 0 \end{cases} \quad \text{modèle linéaire tangent}$$

Retour à  $\hat{S}$  : produit scalaire du MLT avec une variable  $p$

$$-b \int_0^1 \hat{u}'' p + c \int_0^1 \hat{u}' p = \delta b \int_0^1 u'' p - \delta c \int_0^1 u' p$$



$$\begin{cases} -b \hat{u}''(x) + c \hat{u}'(x) = \delta b u''(x) - \delta c u'(x) & x \in ]0, 1[ \\ \hat{u}(0) = \hat{u}(1) = 0 \end{cases} \quad \text{modèle linéaire tangent}$$

Retour à  $\hat{S}$  : produit scalaire du MLT avec une variable  $p$

$$-b \int_0^1 \hat{u}'' p + c \int_0^1 \hat{u}' p = \delta b \int_0^1 u'' p - \delta c \int_0^1 u' p$$

Intégration par parties :

$$\int_0^1 \hat{u}(-b p'' - c p') = b \hat{u}'(1)p(1) - b \hat{u}'(0)p(0) + \int_0^1 (\delta b u'' - \delta c u') p$$

$$\begin{cases} -b p''(x) - c p'(x) = u(x) & x \in ]0, 1[ \\ p(0) = p(1) = 0 \end{cases} \quad \text{modèle adjoint}$$



$$\begin{cases} -b \hat{u}''(x) + c \hat{u}'(x) = \delta b u''(x) - \delta c u'(x) & x \in ]0, 1[ \\ \hat{u}(0) = \hat{u}(1) = 0 \end{cases} \quad \text{modèle linéaire tangent}$$

Retour à  $\hat{S}$  : produit scalaire du MLT avec une variable  $p$

$$-b \int_0^1 \hat{u}'' p + c \int_0^1 \hat{u}' p = \delta b \int_0^1 u'' p - \delta c \int_0^1 u' p$$

Intégration par parties :

$$\int_0^1 \hat{u}(-b p'' - c p') = b \hat{u}'(1)p(1) - b \hat{u}'(0)p(0) + \int_0^1 (\delta b u'' - \delta c u') p$$

$$\begin{cases} -b p''(x) - c p'(x) = u(x) & x \in ]0, 1[ \\ p(0) = p(1) = 0 \end{cases} \quad \text{modèle adjoint}$$

Alors  $\nabla S(b, c) = \left( \int_0^1 p u'', - \int_0^1 p u' \right)$



## Remarque

Formellement, on vient de faire

$$(MLT(\hat{u}), p) = (\hat{u}, MLT^*(p))$$

On a donc bien calculé l'adjoint du modèle linéaire tangent.



## Remarque

Formellement, on vient de faire

$$(MLT(\hat{u}), p) = (\hat{u}, MLT^*(p))$$

On a donc bien calculé l'adjoint du modèle linéaire tangent.

## En pratique

- ▶ On résout le modèle direct

$$\begin{cases} -b u''(x) + c u'(x) = f(x) & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

- ▶ Puis on résout le modèle adjoint

$$\begin{cases} -b p''(x) - c p'(x) = u(x) & x \in ]0, 1[ \\ p(0) = p(1) = 0 \end{cases}$$

- ▶ Et on en déduit le gradient :  $\nabla S(b, c) = \left( \int_0^1 p u'', - \int_0^1 p u' \right)$



## La version discrète : idem

**Modèle :**

$$\begin{cases} -b u''(x) + c u'(x) = f(x) & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

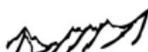
$$\rightarrow \begin{cases} -b \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i & i = 1 \dots N \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

**Sortie :**

$$S(b, c) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x) dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N u_i^2$$

**Dérivée de Gâteaux :**

$$\hat{S}[b, c](\delta b, \delta c) = \int_0^1 \hat{u}(x) u(x) dx \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^N \hat{u}_i u_i$$



## Modèle linéaire tangent

$$\begin{cases} -b \hat{u}''(x) + c \hat{u}'(x) = \delta b u''(x) - \delta c u'(x) & x \in ]0, 1[ \\ \hat{u}(0) = \hat{u}(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b \frac{\hat{u}_{i+1} - 2\hat{u}_i + \hat{u}_{i-1}}{h^2} + c \frac{\hat{u}_{i+1} - \hat{u}_{i-1}}{2h} = \delta b \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \delta c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} & i = 1 \dots N \\ \hat{u}_0 = \hat{u}_{N+1} = 0 \end{cases}$$

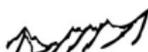
## Modèle adjoint

$$\begin{cases} -b p''(x) - c p'(x) = u(x) & x \in ]0, 1[ \\ p(0) = p(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{h^2} - c \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2h} = u_i - u_i^{\text{obs}} & i = 1 \dots N \\ p_0 = p_{N+1} = 0 \end{cases}$$

## Gradient

$$\nabla S(b, c) = \left( \int_0^1 p u'', - \int_0^1 p u' \right) \rightarrow \left( \sum_{i=1}^N p_i \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, - \sum_{i=1}^N p_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right)$$



## Remarque : en écriture matricielle

Déterminer le modèle adjoint revient simplement à **transposer la matrice** définissant le modèle linéaire tangent

$$(\mathbf{M}\hat{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = (\hat{\mathbf{U}}, \mathbf{M}^T \mathbf{P})$$

Dans l'exemple précédent :

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2\alpha & -\alpha + \beta & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha - \beta & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha - \beta & \begin{matrix} -\alpha + \beta \\ 2\alpha \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = b/h^2, \beta = c/2h$$



## Remarque : en écriture matricielle

Déterminer le modèle adjoint revient simplement à **transposer la matrice** définissant le modèle linéaire tangent

$$(\mathbf{M}\hat{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = (\hat{\mathbf{U}}, \mathbf{M}^T \mathbf{P})$$

Dans l'exemple précédent :

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2\alpha & -\alpha + \beta & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha - \beta & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha - \beta & \begin{matrix} -\alpha + \beta \\ 2\alpha \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = b/h^2, \beta = c/2h$$

Mais  $\mathbf{M}$  n'est en général pas construite explicitement dans les modèles complexes.



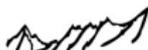
# Un exemple plus compliqué (mais toujours linéaire) : sensibilité à un coefficient de diffusion (EDP 1-D)

Modèle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t) & x \in ]0, L[, t \in ]0, T[ \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, L] \end{cases}$$

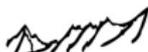
► Entrée :  $K(x)$

► Sortie :  $S(K(x)) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L u^2(x, t) dx dt$



## Dérivée de Gâteaux

$$\hat{S}[K](k) = \int_0^T \int_0^L \hat{u}(x, t) u(x, t) dx dt$$



## Dérivée de Gâteaux

$$\hat{S}[K](k) = \int_0^T \int_0^L \hat{u}(x, t) u(x, t) dx dt$$

## Modèle linéaire tangent

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K(x) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) & x \in ]0, L[, t \in ]0, T[ \\ \hat{u}(0, t) = \hat{u}(L, t) = 0 & t \in [0, T] \\ \hat{u}(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \end{cases}$$



## Dérivée de Gâteaux

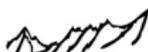
$$\hat{S}[K](k) = \int_0^T \int_0^L \hat{u}(x, t) u(x, t) dx dt$$

## Modèle linéaire tangent

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K(x) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) & x \in ]0, L[, t \in ]0, T[ \\ \hat{u}(0, t) = \hat{u}(L, t) = 0 & t \in [0, T] \\ \hat{u}(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \end{cases}$$

## Modèle adjoint

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( K(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = u & x \in ]0, L[, t \in ]0, T[ \\ p(0, t) = p(L, t) = 0 & t \in [0, T] \\ p(x, T) = 0 & x \in [0, L] \end{cases} \quad \text{condition finale !!} \rightarrow \text{intégration rétrograde}$$



Dérivée de Gâteaux de  $S$ 

$$\begin{aligned}\hat{S}[K](k) &= \int_0^T \int_0^L \hat{u}(x, t) u(x, t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} dx dt\end{aligned}$$

Gradient de  $S$ 

$$\nabla S = \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, t) \frac{\partial p}{\partial x}(\cdot, t) dt \quad \text{fonction de } x$$



## Généralisation à une sortie plus complexe

## Sortie

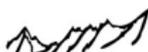
$$S(K) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L Q(u(x, t)) dx dt$$

Dérivée de Gâteaux de  $S$ 

$$\hat{S}[K](k) = \int_0^T \int_0^L \left[ \frac{dQ}{du}(u) \right] (\hat{u})(x, t) dx dt$$

mis sous la forme

$$\hat{S}[K](k) = \int_0^T \int_0^L \hat{u} R(u)$$



Modèle linéaire tangent  $\longrightarrow$  le même

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K(x) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) & x \in ]0, L[, t \in ]0, T[ \\ \hat{u}(0, t) = \hat{u}(L, t) = 0 & t \in [0, T] \\ \hat{u}(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \end{cases}$$

Modèle adjoint  $\longrightarrow$  modification du second membre

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( K(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = R(u) & x \in ]0, L[, t \in ]0, T[ \\ p(0, t) = p(L, t) = 0 & t \in [0, T] \\ p(x, T) = 0 & x \in [0, L] \end{cases}$$

Gradient de  $S \longrightarrow$  le même

$$\nabla S(K) = \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, t) \frac{\partial p}{\partial x}(\cdot, t) dt$$

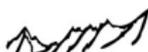


## Un exemple non linéaire : équation de Burgers

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & x \in ]0, L[, t \in [0, T] \\ u(0, t) = \psi_1(t) & t \in [0, T] \\ u(L, t) = \psi_2(t) & t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, L] \end{cases}$$

▶ **Entrée** :  $u_0(x)$

▶ **Sortie** :  $S(u_0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L u^2(x, t) dx dt$



## Dérivée de Gâteaux

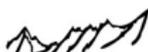
$$\hat{S}[u_0](h_0) = \int_0^T \int_0^L \hat{u}(x, t) u(x, t) dx dt$$

## Modèle linéaire tangent

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial(u\hat{u})}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = 0 & x \in ]0, L[, t \in [0, T] \\ \hat{u}(0, t) = 0 & t \in [0, T] \\ \hat{u}(L, t) = 0 & t \in [0, T] \\ \hat{u}(x, 0) = h_0(x) & x \in [0, L] \end{cases}$$

## Modèle adjoint

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = u & x \in ]0, L[, t \in [0, T] \\ p(0, t) = 0 & t \in [0, T] \\ p(L, t) = 0 & t \in [0, T] \\ p(x, T) = 0 & x \in [0, L] \end{cases} \text{condition finale !!} \rightarrow \text{intégration rétrograde}$$



Dérivée de Gâteaux de  $S$ 

$$\begin{aligned}\hat{S}[u_0](h_0) &= \int_0^T \int_0^L \hat{u}(x, t) u(x, t) dx dt \\ &= - \int_0^L h_0(x) p(x, 0) dx\end{aligned}$$

Gradient de  $S$ 

$$\nabla S = -p(\cdot, 0) \quad \text{fonction de } x$$



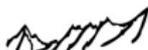
# Dérivation et validation d'un code adjoint

## Ecriture d'un code adjoint

- ▶ obéit à des règles systématiques
- ▶ n'est pas la tâche la plus épanouissante qui soit
- ▶ il existe des logiciels de différentiation automatique :  
→ cf <http://www.autodiff.org>

## Tests de validation

- ▶ du modèle linéaire tangent : comparer  $M(x + \delta x) - M(x)$  et  $\mathbf{M}[x](\delta x)$  pour de petites valeurs de  $\|\delta x\|$
- ▶ du modèle adjoint : comparer  $(\mathbf{M}x, z)$  et  $(x, \mathbf{M}^*z)$
- ▶ du gradient : comparer la dérivée directionnelle  $(\nabla S(x), d)$  avec le taux d'accroissement  $\frac{S(x + \alpha d) - S(x)}{\alpha}$  (où  $\nabla S(x)$  est le gradient obtenu par le code adjoint)

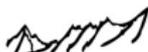


# Plan

Quelques rappels

La méthode adjointe

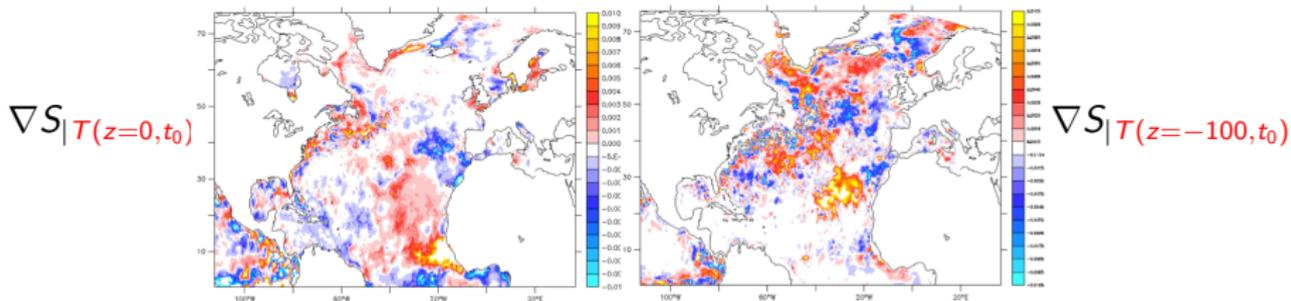
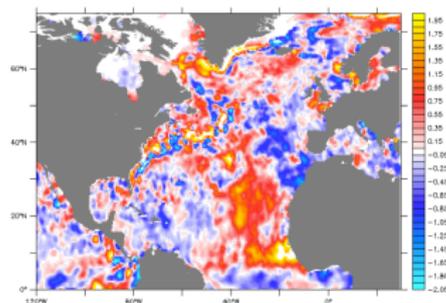
Quelques exemples



# Exemple 1 : modèle océanique NEMO (Vidard, 2013)

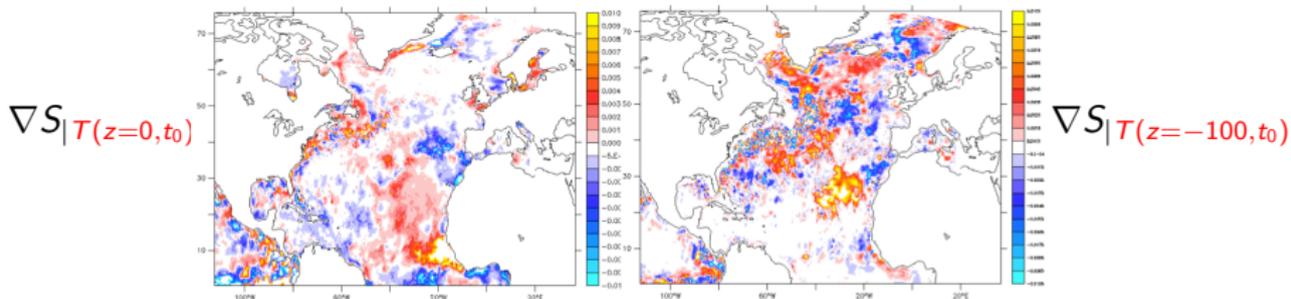
A quoi l'erreur de prévision à 1 semaine sur la température de surface est-elle due ?

$$S = \| (T_{z=0}^{\text{previ}} - T_{z=0}^{\text{obs}}) (t_0 + 1 \text{ sem}) \|$$

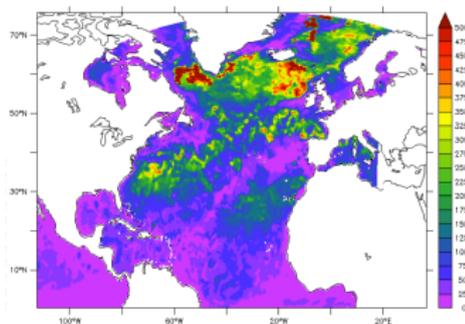


# Exemple 1 : modèle océanique NEMO (Vidard, 2013)

$$S = \left\| \left( T_{z=0}^{\text{previ}} - T_{z=0}^{\text{obs}} \right) (t_0 + 1 \text{ sem}) \right\|$$



Profondeur de la couche de mélange à  $t = t_0$



## Exemple 2 : encore de l'océanographie (Ayoub, 2006)

### Model

- MIT, primitive equation model,  $1^\circ \times 1^\circ$  resolution, 23 vertical levels
- simplified vertical mixing physics ( $K_z = c^{\text{te}}$ )
- atmospheric forcing:
  - 12h wind stress, 24h heat and fresh water fluxes from NCEP
- open boundary conditions:
  - use of U, V, T, S fields from a global  $2^\circ \times 2^\circ$  simulation
- simulation and optimization over the year 1993

### Adjoint model

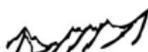
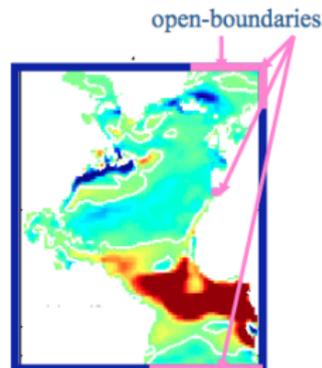
- obtained using an automatic differentiation compiler: the TAMC of Giering and Kaminsky (1998)

### Control variables

- initial conditions in T, S
- prescribed fields (U, V, T, S) at the open boundaries every month
- atm. forcing fields every 10 days: zonal + meridional wind stress, fresh and water fluxes

### Constraining data set

- altimetric sea level height (TOPEX/POSEIDON)
- monthly SST (Reynolds) + monthly climatological T,S fields (Levitus)



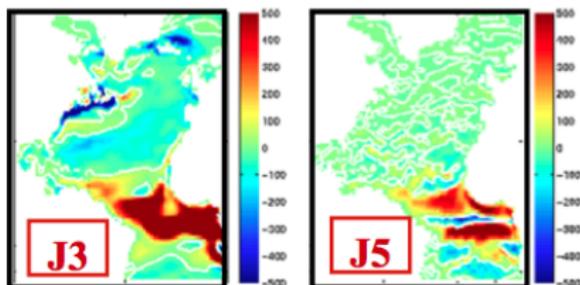
## Sensitivity to the wind stress forcing

Monthly mean for May of the sensitivity to the zonal and meridional components

J3 = misfits between the model and Reynolds SST

J5 = misfits between the model and T/P SSH anomaly

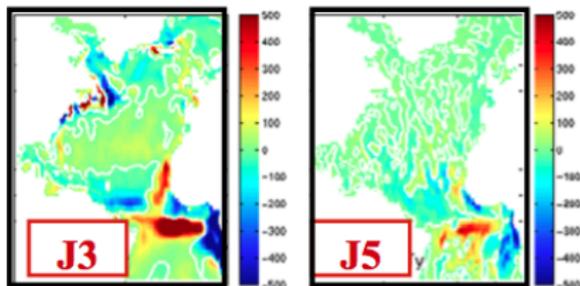
zonal



The largest influence of wind stress is:  
 - on the SST misfits  
 - in the tropical band for both J3 and J5

The sensitivities of J3 and J5 show consistent structures between 10°S and 20°N  
 But some inconsistency is evidenced at the equator for the zonal component

meridional



The influence on SSH anomaly misfits is negligible outside the tropical band

Units:  $(\text{Nm}^{-2})^{-1}$

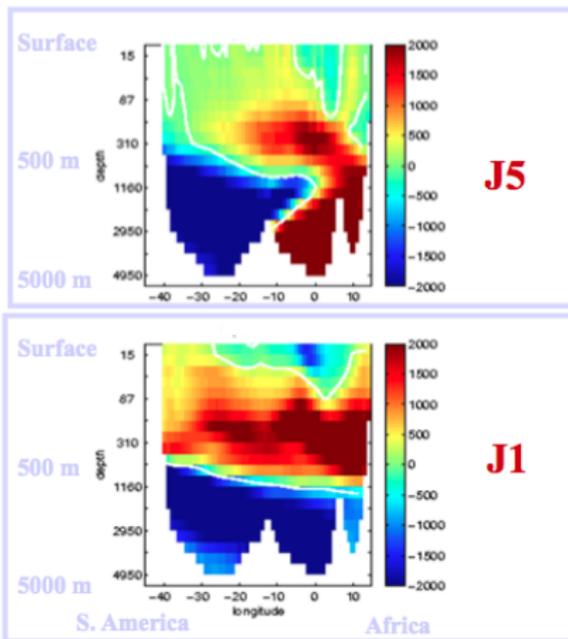
*N. Ayoub (LEGOS/CNRS)*

## Sensitivity to the open boundary fields

Monthly mean for April of the sensitivity to the meridional velocity at 25°S

J1 = misfits between the model and climatological T field

J5 = misfits between the model and T/P SSH anomaly



Gradients at 25°S as a function of depth and longitude (in  $(\text{m/s})^{-1}$ )

- strong uncoupling between subsurface and deep layers  
 $\Rightarrow$  role and structure of the weighting matrix B
- areas of inconsistencies between the signs of the gradients, therefore between the constraints brought by the two datasets
- large sensitivities close to the bottom: compensation of model errors by the boundary control terms ?

*N. Ayoub (LEGOS/CNRS)*

## Exemple 3 : analyse de stabilité

On considère un système dynamique :

- ▶  $\mathbf{x}(t)$  le vecteur d'état
- ▶  $M_{t_1 \rightarrow t_2}$  le modèle entre les instants  $t_1$  et  $t_2$

### Taux d'accroissement d'une perturbation $\mathbf{z}(t_1)$

$$\rho(\mathbf{z}(t_1)) = \frac{\|M_{t_1 \rightarrow t_2}(\mathbf{x}(t_1) + \mathbf{z}(t_1)) - M_{t_1 \rightarrow t_2}(\mathbf{x}(t_1))\|}{\|\mathbf{z}(t_1)\|}$$

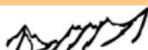
où  $\|\cdot\|$  est une norme donnée.

### Perturbation optimale

$$\mathbf{z}_1^*(t_1) \text{ telle que } \rho(\mathbf{z}_1^*(t_1)) = \max_{\mathbf{z}(t_1)} \rho(\mathbf{z}(t_1))$$

### Famille de vecteurs de croissance maximum

$$\rho(\mathbf{z}_i^*(t_1)) = \max_{\mathbf{z}(t_1) \perp \text{Vect}(\mathbf{z}_1^*(t_1), \dots, \mathbf{z}_{i-1}^*(t_1))} \rho(\mathbf{z}(t_1)) \quad , i \geq 2$$



## Cas linéaire

Si  $M$  est linéaire, ou remplacé par son approximation linéaire tangente  $\mathbf{M}$ , le taux d'accroissement devient :

$$\begin{aligned} \rho^2(\mathbf{z}(t_1)) &= \frac{\|\mathbf{M}_{t_1 \rightarrow t_2}(\mathbf{z}(t_1))\|^2}{\|\mathbf{z}(t_1)\|^2} = \frac{\langle \mathbf{M}_{t_1 \rightarrow t_2} \mathbf{z}(t_1), \mathbf{M}_{t_1 \rightarrow t_2} \mathbf{z}(t_1) \rangle}{\langle \mathbf{z}(t_1), \mathbf{z}(t_1) \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{z}(t_1), \mathbf{M}_{t_1 \rightarrow t_2}^* \mathbf{M}_{t_1 \rightarrow t_2} \mathbf{z}(t_1) \rangle}{\langle \mathbf{z}(t_1), \mathbf{z}(t_1) \rangle} \end{aligned}$$

$\mathbf{M}_{t_1 \rightarrow t_2}^* \mathbf{M}_{t_1 \rightarrow t_2}$  étant symétrique définie positive, ses valeurs propres sont réelles positives, et les vecteurs propres sont (ou peuvent être choisis) orthogonaux.

Les vecteurs de croissance maximum sont les premiers vecteurs propres de  $\mathbf{M}_{t_1 \rightarrow t_2}^* \mathbf{M}_{t_1 \rightarrow t_2}$ , correspondant aux plus grandes valeurs propres. Ce sont les vecteurs singuliers.

$$\mathbf{M}_{t_1 \rightarrow t_2}^* \mathbf{M}_{t_1 \rightarrow t_2} \mathbf{f}_i^+ = \mu_i \mathbf{f}_i^+$$



## Implémentation numérique

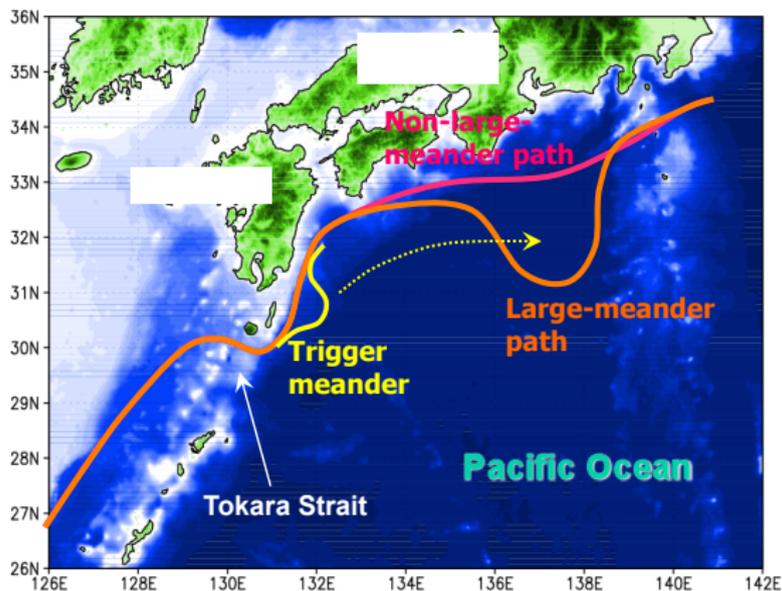
Le calcul des  $f_i^+$  est réalisé par un algorithme de décomposition en éléments propres (par ex. Lanczos). On n'utilise que des multiplications matrice-vecteur, i.e. des **intégrations du modèle direct et du modèle adjoint**.

## Applications

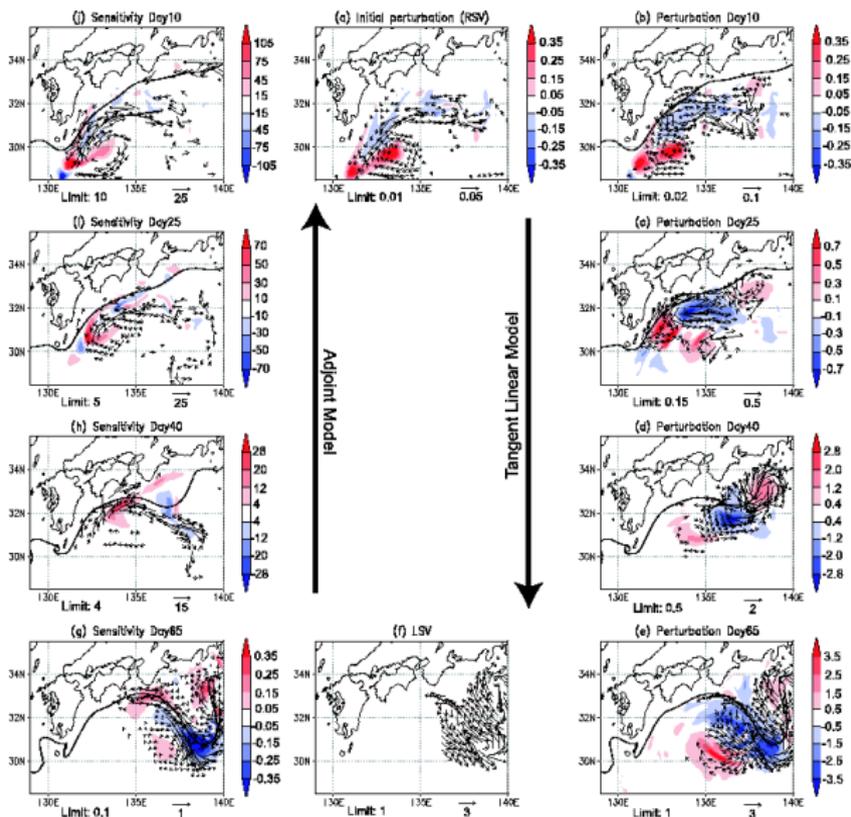
- ▶ Choix des perturbations pour les prévisions d'ensemble
- ▶ Etude du système dynamique



# Application au Kuroshio (Kamachi *et al.*, 2007)



# Application au Kuroshio (Kamachi *et al.*, 2007)



# Cadre général

On considère un modèle complexe.

- ▶ Une mesure de la sensibilité d'une sortie  $S$  par rapport à une entrée  $E$  est  $\frac{dS}{dE}$  (ou  $\nabla_E S$ , ou  $\frac{\partial S}{\partial E}$ )

- ▶ Cette mesure est **locale** : le gradient est calculé autour de la valeur courante de  $E$



- ▶ Les **difficultés** :
  - ▶ au niveau continu : les entrées sont en général des fonctions
  - ▶ au niveau discret : les systèmes sont de grande dimension
  - ▶ la dépendance  $S(E)$  peut être (bien) cachée
- ▶ La **méthode adjointe** peut résoudre efficacement ces difficultés en fournissant un **gradient exact** pour un **coût indépendant de la dimension** des entrées.

