

MaiMoSiNE

Groupement de Recherche
MASCOT-NUM
*Méthodes d'Analyse Stochastique pour
les COdes et Traitements NUMériques*



Analyse de sensibilité spatialisée

Nathalie Saint-Geours
Irstea - UMR TETIS,
Montpellier

École de Physique des Houches

9 Avril 2013

De quoi va-t-on parler ?

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$E(Y^k) = \int_{(0, \infty)} y^k dF(y)$$
$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$
$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$
$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n} \quad \tilde{0}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$
$$\dots$$

De quoi va-t-on parler ?

Analyse de sensibilité
par décomposition de la variance
pour des modèles spatialisés

De quoi va-t-on parler ?

Analyse de sensibilité
par décomposition de la variance
pour des modèles spatialisés

De quoi va-t-on parler ?

Analyse de sensibilité
par décomposition de la variance
pour des modèles **spatialisés**

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \frac{V_{i_1, i_2, \dots, i_n}}{\text{Var}(Y)}$$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = \int_{T(x) \leq t} dF(x)$$

$$E(Y^k) = \int (t(x))^k dF(x)$$

$$P(Y > M) = \int_{T(x) > M} dF(x)$$

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1, \dots, i_s} = 1$$

$$Y_{\text{obs}}^n = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n W_i + \dots + V_1 + \dots + V_n \quad \tilde{0}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

Qu'entend-on par **modèle spatialisé** ?

Qu'entend-on par modèle spatialisé ?

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^*) = \int_{(x)}^{(y)} dF(x)$$

$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

Qu'entend-on par modèle spatialisé ?

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$E(Y^*) = \int_{U(x)} dF(x)$$
$$P(Y > M) = \int_{U(x) > M} dF(x)$$
$$Y_{\text{obs}} = F^T \beta + \epsilon$$
$$Y_i = \sum_{1 \leq j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{i, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{ij} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$
$$V_{ij,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$
$$\dots$$

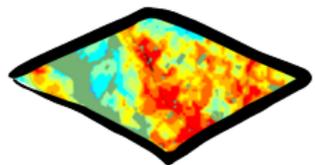


entrées spatialisées

+ autres entrées

modèle

sortie spatialisée



Qu'entend-on par modèle spatialisé ?

Notations

- entrées spatialisées :

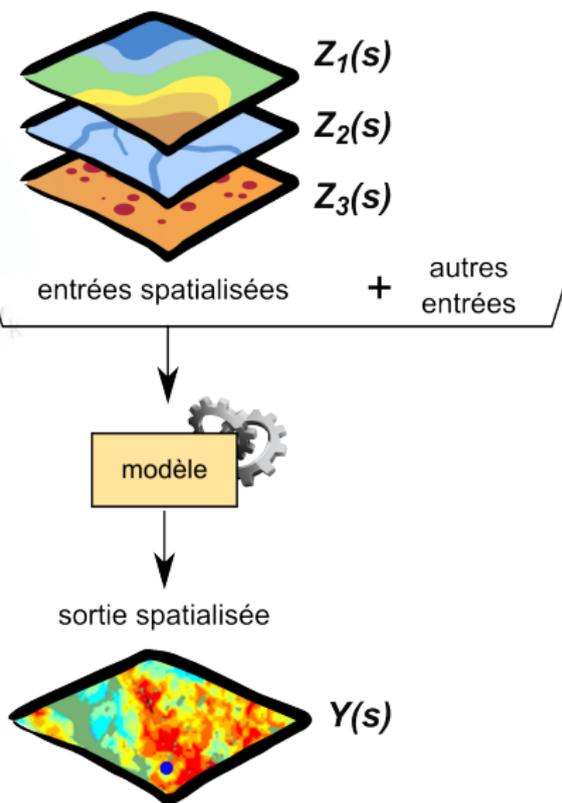
$Z(s)$ en tout point $s \in \mathcal{D}$

- entrées non spatialisées :

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$

- sortie spatialisée :

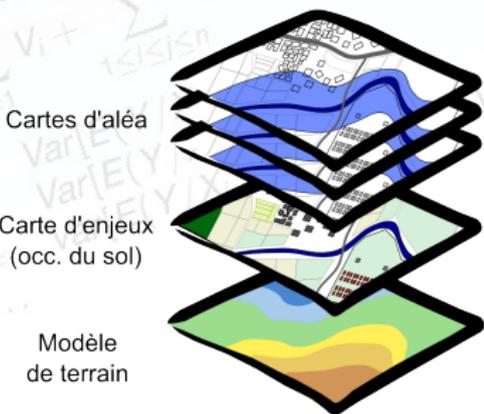
$Y(s)$ en tout point $s \in \mathcal{D}$



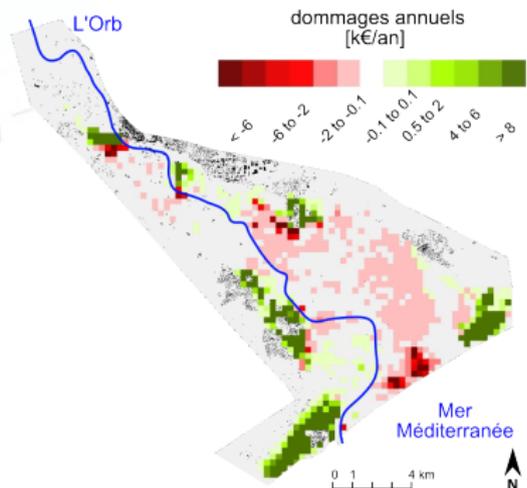
NOE : évaluation économique du risque d'inondation

Irstea - Grelot *et al.*

- **3 entrées spatialisées** et 2 entrées non spatialisées
- **sortie spatialisée** : carte des dommages moyens annuels



Entrées spatialisées

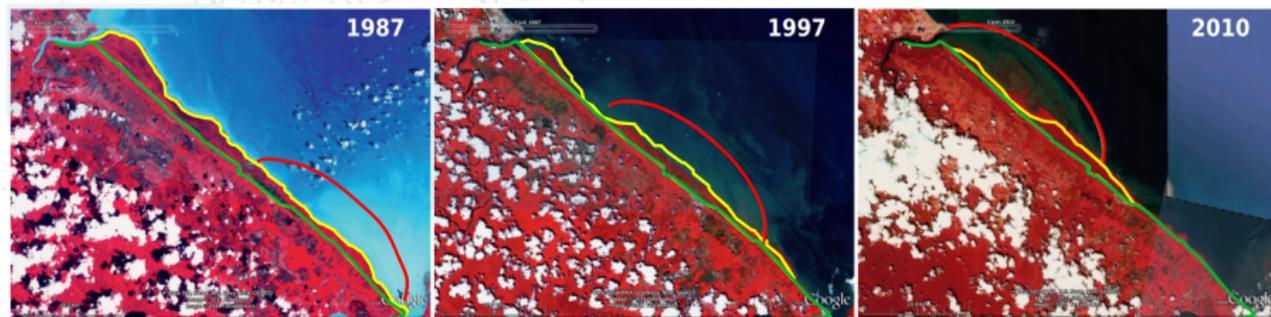


Sortie spatialisée

OCELET : dynamique de la mangrove en Guyane

CIRAD - Degenne *et al.* (2010)

- **entrées spatialisées** : trait de côte et mangrove à $t = 0$
- entrées non spatialisées : force et direction du courant, du vent. . .
- **sortie spatialisée** : géométrie de la mangrove au cours du temps



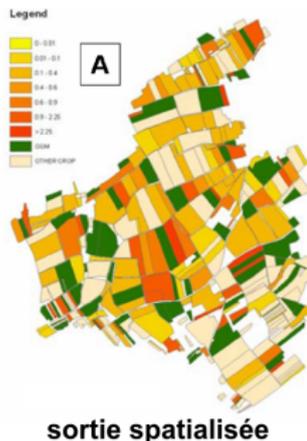
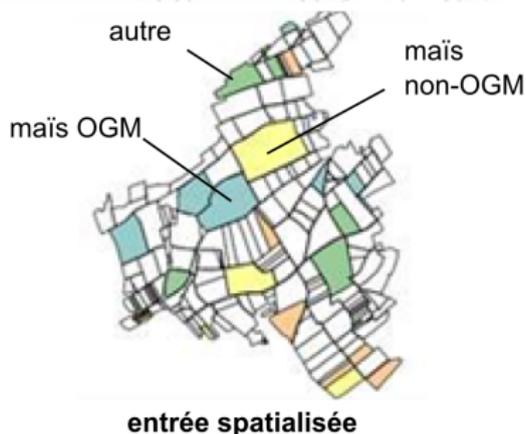
Crédit: Degenne *et al.* (2010)

MAPOD : flux de pollen dans les paysages agricoles

INRA, Angevin *et al.* (2008)

Étude de la dissémination de maïs OGM à l'échelle du paysage agricole.

- **entrée spatialisée** : carte des parcelles
- entrées non spatialisées : vent, caractéristiques des variétés de maïs
- **sortie spatialisée** : taux de pollinisation croisée non-OGM/ OGM



Modèle spatialisé : représentation de l'espace

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^*) = \int_{(x) \in \dots} dF(x)$$

$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

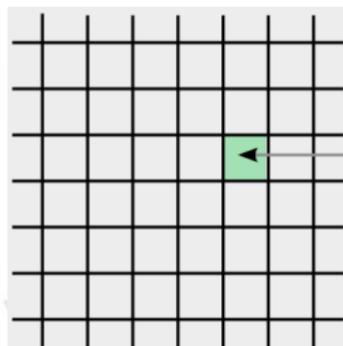
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

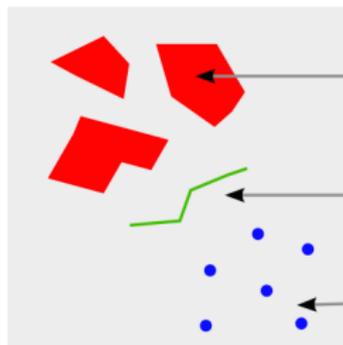
Modèle spatialisé : représentation de l'espace

Deux options (au moins)

- grille régulière
- ou données vectorielles : points, lignes, polygones



pixel

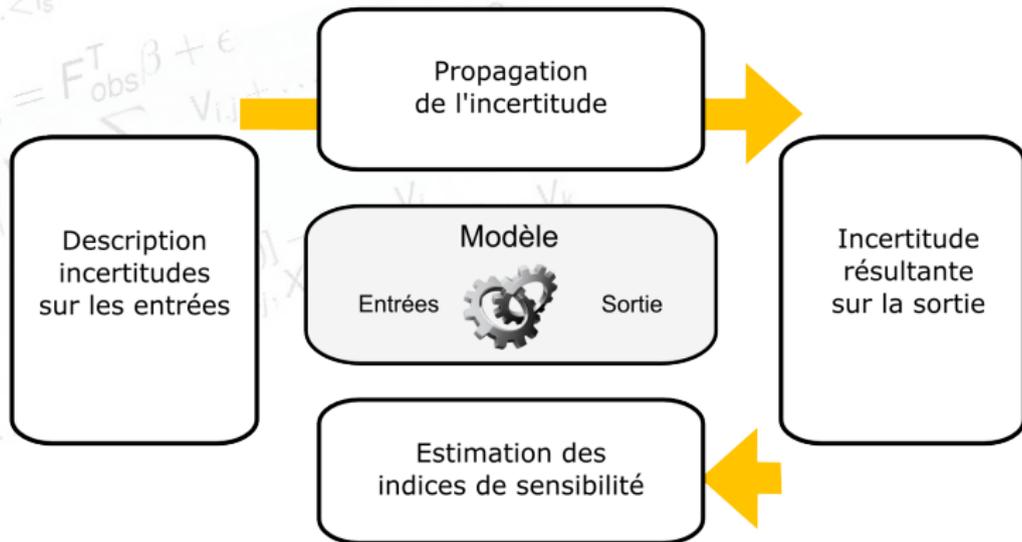


objets
surfaciques

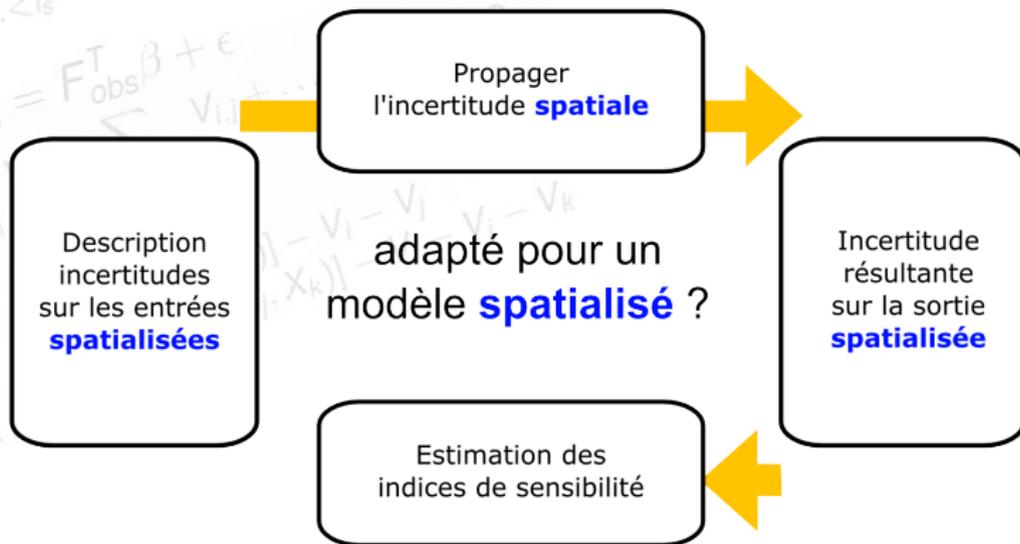
objets
linéaires

objets
ponctuels

AS de modèles spatialisés : quelles difficultés ?



AS de modèles spatialisés : quelles difficultés ?



$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \frac{V_{i_1, i_2, \dots, i_n}}{\text{Var}(Y)}$$

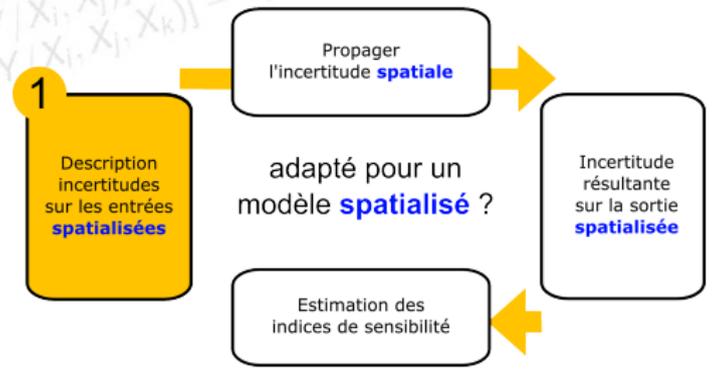
$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1, \dots, i_s} = 1$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{i,j} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j)]$$
$$V_{i,j,k} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j), E(Y/X_k)]$$

1^{er} point

Comment décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées ?



Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^*) = \int_{0}^{\infty} Q(x) dF(x)$$

$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

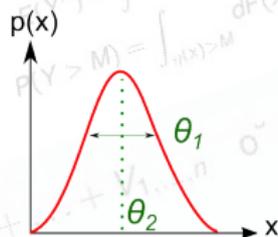
Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

entrée

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}$

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

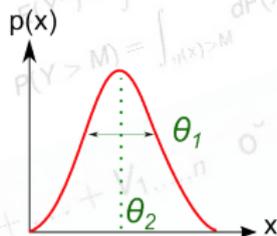
entrée
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$



loi de probabilité P_x
de param. θ

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

entrée
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$



loi de probabilité P_X
de param. θ

$$x^{(1)} = 12.3$$

$$x^{(2)} = 4.5$$

$$x^{(3)} = 8.9$$

$$x^{(4)} = 7.4$$

$$x^{(5)} = 48.5$$

$$x^{(6)} = 23$$

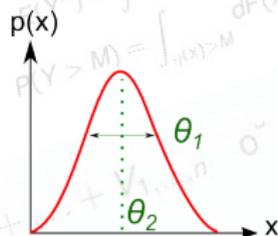
$$x^{(7)} = 8.5$$

$$x^{(8)} = 10.5$$

échantillon

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

entrée
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$



loi de probabilité $P_{\mathbf{X}}$
de param. θ



$x^{(1)} = 12.3$

$x^{(2)} = 4.5$

$x^{(3)} = 8.9$

$x^{(4)} = 7.4$

$x^{(5)} = 48.5$

$x^{(6)} = 23$

$x^{(7)} = 8.5$

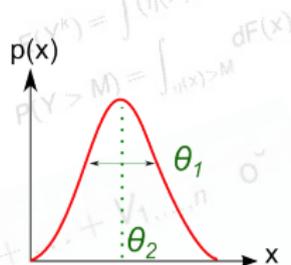
$x^{(8)} = 10.5$

échantillon

entrée
spatialisée
 $\{Z(s) | s \in \mathcal{D}\}$

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

entrée
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$



loi de probabilité $P_{\mathbf{X}}$
de param. θ



$x^{(1)} = 12.3$

$x^{(2)} = 4.5$

$x^{(3)} = 8.9$

$x^{(4)} = 7.4$

$x^{(5)} = 48.5$

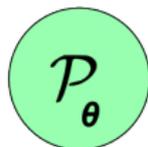
$x^{(6)} = 23$

$x^{(7)} = 8.5$

$x^{(8)} = 10.5$

échantillon

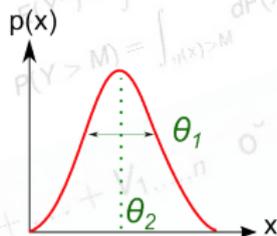
entrée
spatialisée
 $\{Z(s) | s \in \mathcal{D}\}$



processus
stochastique
de param. θ

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

entrée
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$



loi de probabilité $P_{\mathbf{X}}$
de param. θ

$x^{(1)} = 12.3$

$x^{(2)} = 4.5$

$x^{(3)} = 8.9$

$x^{(4)} = 7.4$

$x^{(5)} = 48.5$

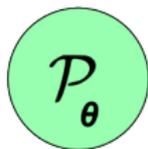
$x^{(6)} = 23$

$x^{(7)} = 8.5$

$x^{(8)} = 10.5$

échantillon

entrée
spatialisée
 $\{Z(s) | s \in \mathcal{D}\}$



processus
stochastique
de param. θ



n réalisations aléatoires

Décrire l'incertitude sur des entrées spatialisées

Des exemples de processus stochastiques \mathcal{P}_θ pour :

- données continues sur une grille régulière
→ *Ex : température du sol, concentration d'un polluant*
- données vectorielles
→ *Ex : carte du parcellaire, peuplement forestier, etc.*

Données continues sur une grille régulière

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^*) = \int_{(x) \in \dots} dF(x)$$

$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

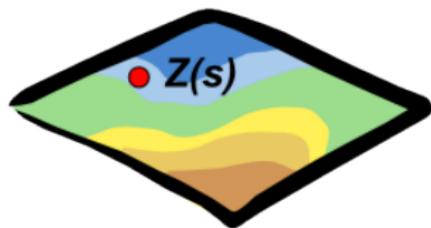
$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

Cadre de la géostatistique

- simulation de champs aléatoires continus $\{Z(s), s \in \mathcal{D}\}$

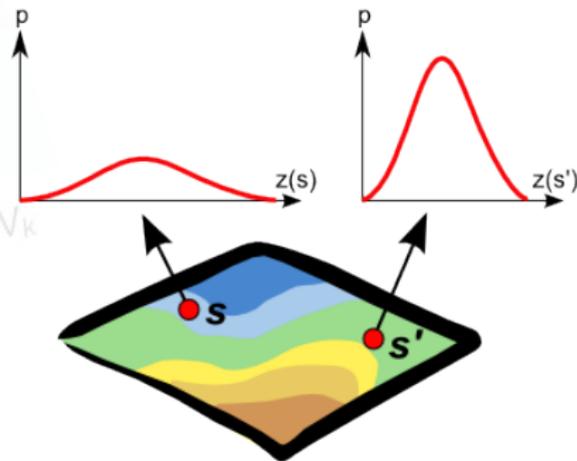


Données continues sur une grille régulière

Cadre de la géostatistique

- simulation de champs aléatoires continus $\{Z(s), s \in \mathcal{D}\}$
- non stationarité dans l'espace

$$s, s' \in \mathcal{D}, \mathbb{P}_{Z(s)} \neq \mathbb{P}_{Z(s')}$$



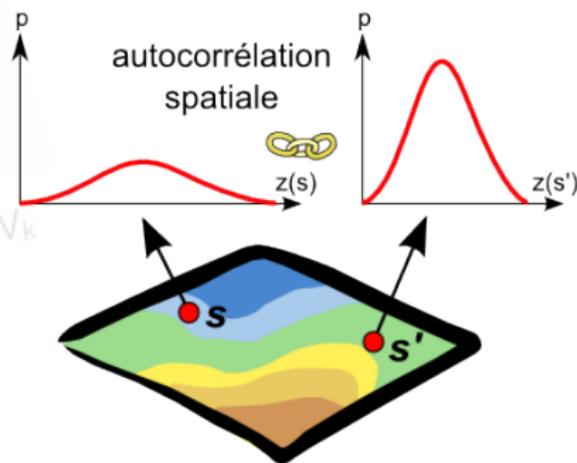
Données continues sur une grille régulière

Cadre de la géostatistique

- simulation de champs aléatoires continus $\{Z(s), s \in \mathcal{D}\}$
- non stationarité dans l'espace

$$s, s' \in \mathcal{D}, \mathbb{P}_{Z(s)} \neq \mathbb{P}_{Z(s')}$$

- **autocorrélation spatiale**



Données continues sur une grille régulière

Cadre de la géostatistique

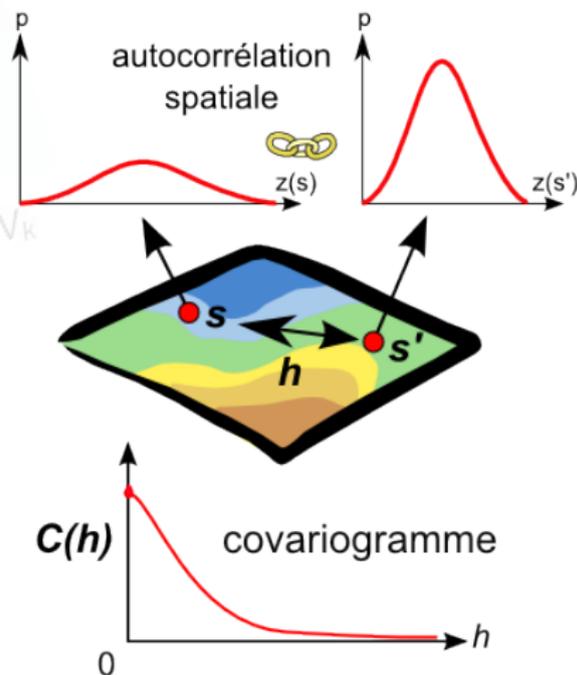
- simulation de champs aléatoires continus $\{Z(s), s \in \mathcal{D}\}$
- non stationarité dans l'espace

$$s, s' \in \mathcal{D}, \mathbb{P}_{Z(s)} \neq \mathbb{P}_{Z(s')}$$

- **autocorrélation spatiale**
- **covariogramme**

(si stationarité d'ordre 2)

$$\text{cov}[Z(s), Z(s+h)] = C(h)$$



Données continues sur une grille régulière

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^*) = \int_{(x)} \dots$$

$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

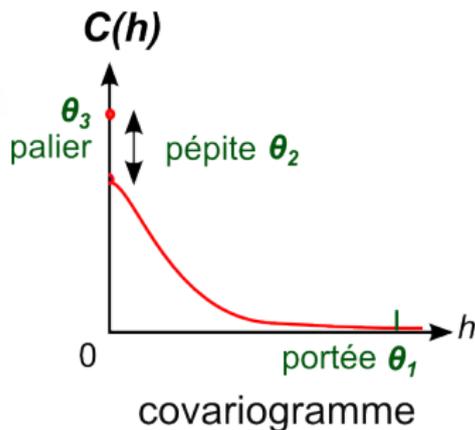
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

Données continues sur une grille régulière

Processus stochastique \mathcal{P}_θ

- une distribution de $Z(s)$
- un covariogramme $C(h)$
- + un algorithme de simulation



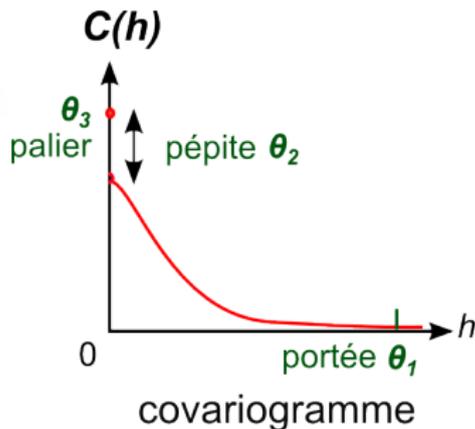
Données continues sur une grille régulière

Processus stochastique \mathcal{P}_θ

- une distribution de $Z(s)$
- un covariogramme $C(h)$
- + un algorithme de simulation

Outils dans

- gstat, geoR, RandomFields...



Données continues sur une grille régulière

Illustration : modèle NOE (risque d'inondation)

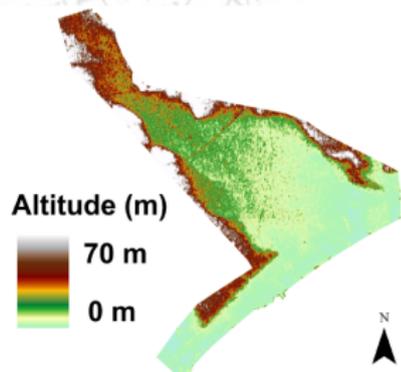
$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M}$$
$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$
$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$
$$\dots$$

Données continues sur une grille régulière

Illustration : modèle NOE (risque d'inondation)

Modèle Numérique de Terrain

- grille de 5m de résolution
- issue de photos aériennes
- erreurs de mesure et d'interpolation



Données continues sur une grille régulière

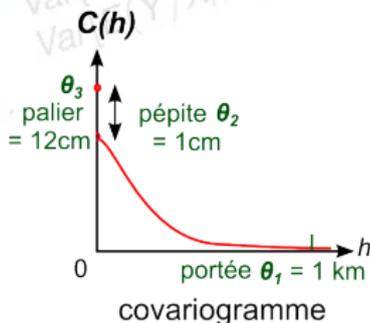
Illustration : modèle NOE (risque d'inondation)

Modèle Numérique de Terrain

- grille de 5m de résolution
- issue de photos aériennes
- erreurs de mesure et d'interpolation

Processus stochastique \mathcal{P}_θ

- erreur Gaussienne $\epsilon(s)$
- contrôles terrain \rightarrow estimation du covariogramme $C(h)$
- Sequential Gaussian Simulation



Données continues sur une grille régulière

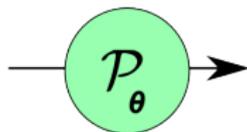
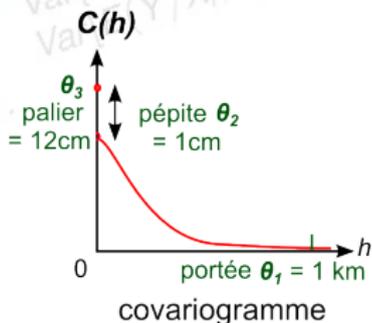
Illustration : modèle NOE (risque d'inondation)

Modèle Numérique de Terrain

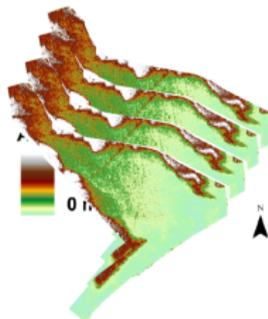
- grille de 5m de résolution
- issue de photos aériennes
- erreurs de mesure et d'interpolation

Processus stochastique \mathcal{P}_θ

- erreur Gaussienne $\epsilon(s)$
- contrôles terrain \rightarrow estimation du covariogramme $C(h)$
- Sequential Gaussian Simulation



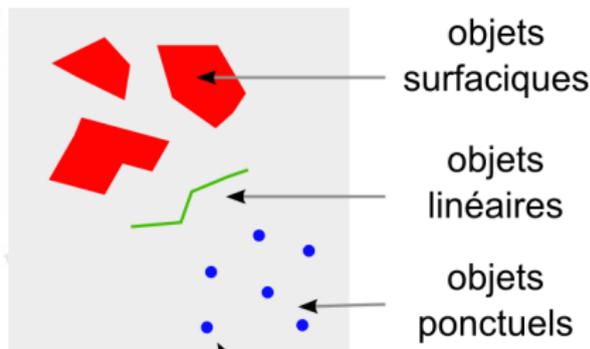
algorithme géostats



$n=100$ réalisations aléatoires du MNT

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$E(Y^*) = \int_{(x,y) \in M} dF(x)$$
$$P(Y > M) = \int_{(x,y) > M} dF(x)$$
$$Y_{\text{obs}} = F^T \beta + \epsilon$$
$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{ij} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j)]$$
$$V_{i,j,k} = \text{Cov}[E(Y/X_i, X_j), E(Y/X_i, X_k)]$$



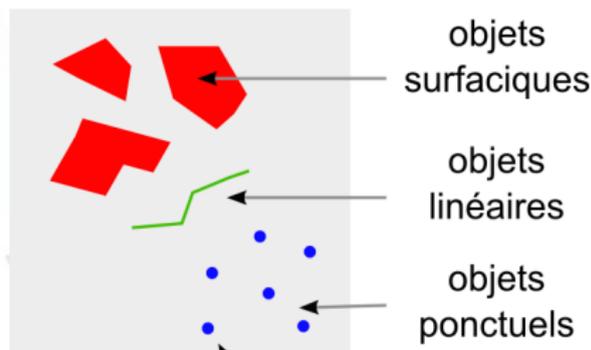
FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
0	Polygone	300	OGM
1	Polygone	1000	NON-OGM
2	Polygone	3289	AUTRE
3	Polygone	150	OGM
4	Polygone	0	OGM
5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Composantes de l'incertitude dans une BD géographique (norme ISO 19115)

- exhaustivité
- cohérence logique
- précision géométrique
- précision sémantique
- précision temporelle



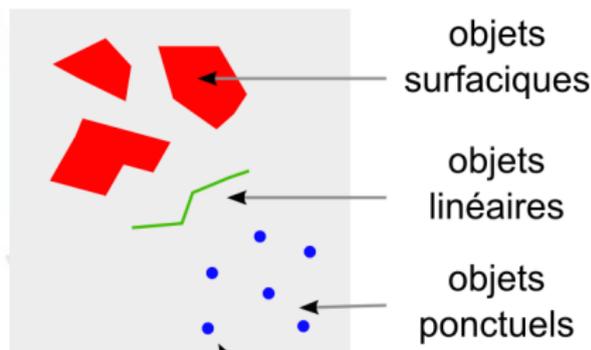
FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
0	Polygone	300	OGM
1	Polygone	1000	NON-OGM
2	Polygone	3289	AUTRE
3	Polygone	150	OGM
4	Polygone	0	OGM
5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Composantes de l'incertitude dans une BD géographique (norme ISO 19115)

- exhaustivité
- cohérence logique
- **précision géométrique**
- **précision sémantique**
- précision temporelle



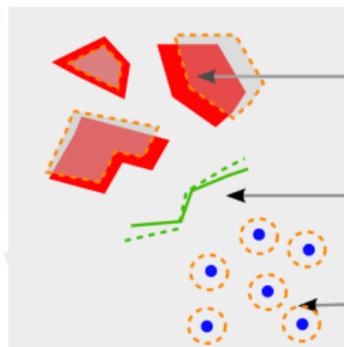
FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
0	Polygone	300	OGM
1	Polygone	1000	NON-OGM
2	Polygone	3289	AUTRE
3	Polygone	150	OGM
4	Polygone	0	OGM
5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Précision géométrique

- erreurs sur la **localisation**
- erreurs sur la **forme** des objets



objets
surfaciques

objets
linéaires

objets
ponctuels

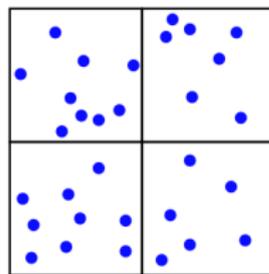
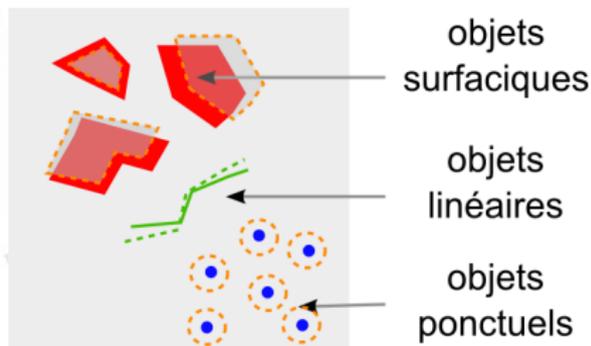
Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Précision géométrique

- erreurs sur la **localisation**
- erreurs sur la **forme** des objets

Quels processus stochastiques ?

- processus ponctuels aléatoires
- tessellations aléatoires
- champ de recherche ouvert



Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Précision géométrique

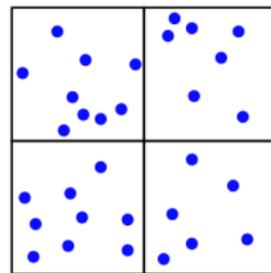
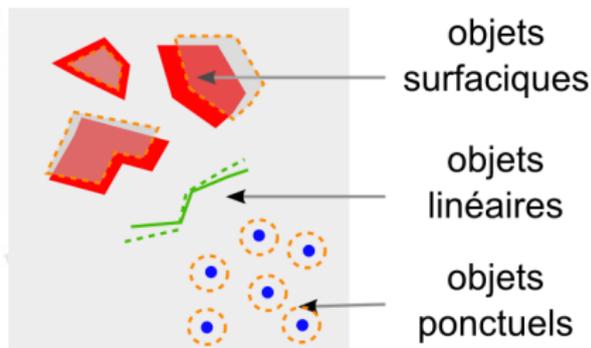
- erreurs sur la **localisation**
- erreurs sur la **forme** des objets

Quels processus stochastiques ?

- processus ponctuels aléatoires
- tesselations aléatoires
- champ de recherche ouvert

Outils dans

- spatstat, stpp



processus ponctuels

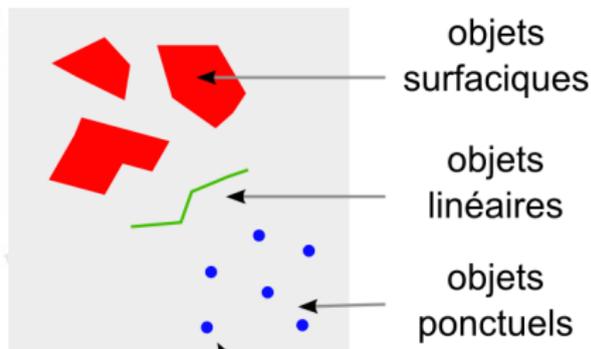


tesselations aléatoires

Viaud et al. (2008)

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$E(Y^*) = \int_{U(x)} dF(x)$$
$$P(Y > M) = \int_{U(x) > M} dF(x)$$
$$Y_{\text{obs}} = F^T_{\text{obs}} \beta + \epsilon$$
$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{ij} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j)]$$
$$V_{i,j,k} = \text{Cov}[E(Y/X_i, X_j), E(Y/X_i, X_j, X_k)]$$

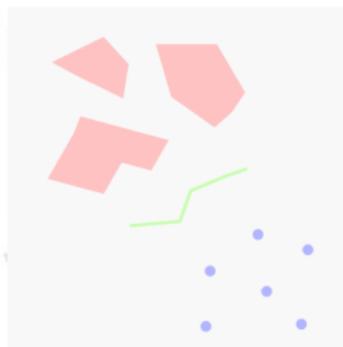


FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
0	Polygone	300	OGM
1	Polygone	1000	NON-OGM
2	Polygone	3289	AUTRE
3	Polygone	150	OGM
4	Polygone	0	OGM
5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$E(Y^*) = \int_{U(x)} dF(x)$$
$$P(Y > M) = \int_{U(x) > M} dF(x)$$
$$Y_{\text{obs}} = F^T_{\text{obs}} \beta + \epsilon$$
$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{ij} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j)] = -V_i - V_j$$
$$V_{i,j,k} = \text{Cov}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] = -V_i - V_j - V_k$$



objets
surfaciques

objets
linéaires

objets
ponctuels

Précision sémantique

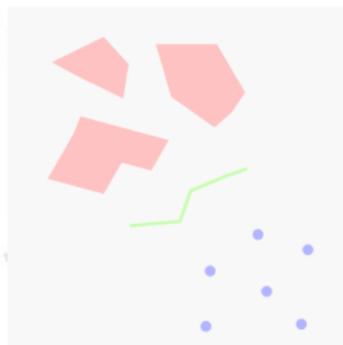
- erreurs sur les **attributs X**
- X** quantitatif ou qualitatif

FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
0	Polygone	300	OGM
1	Polygone	1000	NON-OGM
2	Polygone	3289	AUTRE
3	Polygone	150	OGM
4	Polygone	0	OGM
5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Quels processus stochastiques ?



objets
surfaciques

objets
linéaires

objets
ponctuels

Précision sémantique

- erreurs sur les **attributs X**
- X** quantitatif ou qualitatif

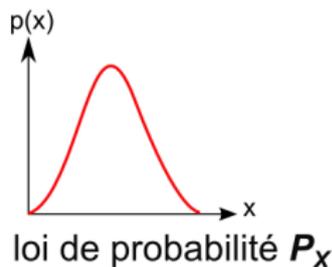
FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
0	Polygone	300	OGM
1	Polygone	1000	NON-OGM
2	Polygone	3289	AUTRE
3	Polygone	150	OGM
4	Polygone	0	OGM
5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Quels processus stochastiques ?

- **X** quantitatif : recherche de \mathbb{P}_X



Précision sémantique

- erreurs sur les **attributs X**
- **X** quantitatif ou qualitatif

EID	Shape *	SURFACE	ROTATION
0	Polygone	300	OGM
1	Polygone	1000	NON-OGM
2	Polygone	3289	AUTRE
3	Polygone	150	OGM
4	Polygone	0	OGM
5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Quels processus stochastiques ?

- **X** quantitatif : recherche de \mathbb{P}_X
- **X** qualitatif :
matrice de confusion

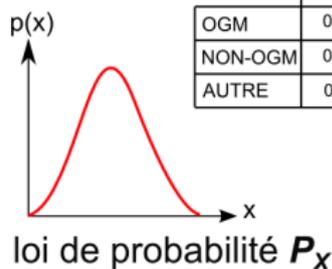
$$m_{ij} = \mathbb{P}(i \rightarrow j)$$

Précision sémantique

- erreurs sur les **attributs X**
- **X** quantitatif ou qualitatif

Matrice de confusion

	OGM	NON-OGM	AUTRE
OGM	0.6	0.3	0.1
NON-OGM	0.3	0.65	0.05
AUTRE	0.1	0.05	0.85



	FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
▶	0	Polygone	300	OGM
	1	Polygone	1000	NON-OGM
	2	Polygone	3289	AUTRE
	3	Polygone	150	OGM
	4	Polygone	0	OGM
	5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Quels processus stochastiques ?

- **X** quantitatif : recherche de \mathbb{P}_X
- **X** qualitatif :
matrice de confusion
- dépendance spatiale :
contrôlée de manière ad-hoc

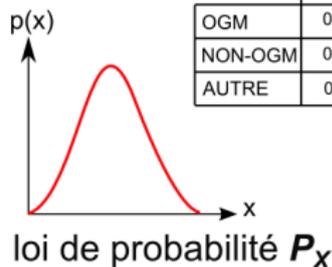
$$m_{ij} = \mathbb{P}(i \rightarrow j)$$

Précision sémantique

- erreurs sur les **attributs X**
- **X** quantitatif ou qualitatif

Matrice de confusion

	OGM	NON-OGM	AUTRE
OGM	0.6	0.3	0.1
NON-OGM	0.3	0.65	0.05
AUTRE	0.1	0.05	0.85



	FID	Shape *	SURFACE	ROTATION
▶	0	Polygone	300	OGM
	1	Polygone	1000	NON-OGM
	2	Polygone	3289	AUTRE
	3	Polygone	150	OGM
	4	Polygone	0	OGM
	5	Polygone	4987	AUTRE

attributs des objets

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle NOE

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} \dots$$
$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$
$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_1, \dots, n \quad \tilde{0}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$
$$\dots$$

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle NOE

Entrée : carte d'occupation du sol

- objets vectoriels
(bâti, parcelles, usines)
- issue d'images satellites
+ enquêtes terrain



Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle NOE

Entrée : carte d'occupation du sol

- objets vectoriels (bâti, parcelles, usines)
- issue d'images satellites + enquêtes terrain

Processus stochastique \mathcal{P}_θ

- erreurs d'étiquetage des objets (attribut **X** qualitatif)
- matrice de confusion

	forêt	eau	entrepôt	vignes	blé	bâti
forêt						
eau						
entrepôt						
culture - vignes						
culture - blé						
bâti						

matrice de confusion
entre 30 classes
d'occupation du sol

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle NOE

Entrée : carte d'occupation du sol

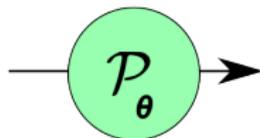
- objets vectoriels (bâti, parcelles, usines)
- issue d'images satellites + enquêtes terrain

Processus stochastique \mathcal{P}_θ

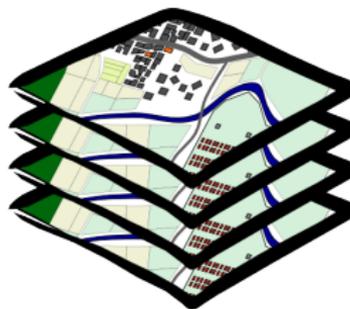
- erreurs d'étiquetage des objets (attribut \mathbf{X} qualitatif)
- matrice de confusion

	forêt	eau	entrepôt	vignes	blé	bâti
forêt						
eau						
entrepôt						
culture - vignes						
culture - blé						
bâti						

matrice de confusion
entre 30 classes
d'occupation du sol



tirages
aléatoires



**$n=1000$ réalisations aléatoires
de la carte d'occupation du sol**

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle MAPOD

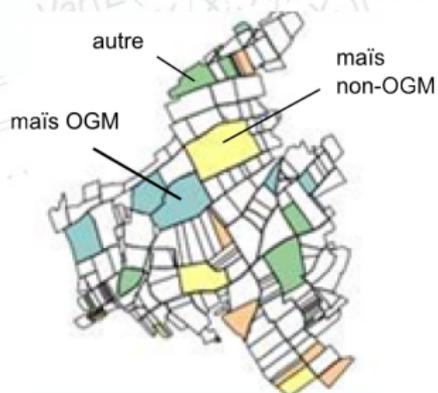
$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} \dots$$
$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$
$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$
$$\dots$$

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle MAPOD

Entrée : carte du parcellaire

- parcelle = polygone de forme variable
- attribut **X** qualitatif :
OGM / NON-OGM / AUTRE

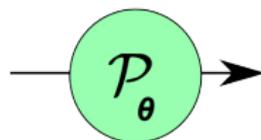
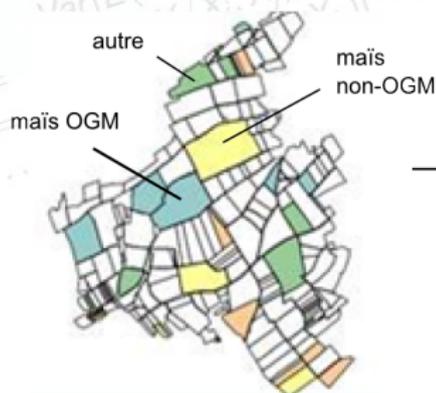


Données vectorielles (points, lignes, polygones)

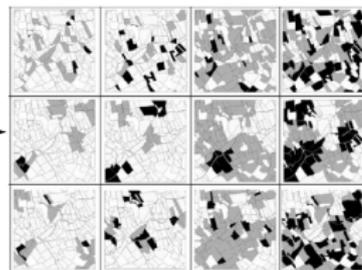
Illustration : modèle MAPOD

Entrée : carte du parcellaire

- parcelle = polygone de forme variable
- attribut **X** qualitatif :
OGM / NON-OGM / AUTRE



algorithme
ad-hoc



Viaud et al. (2008)

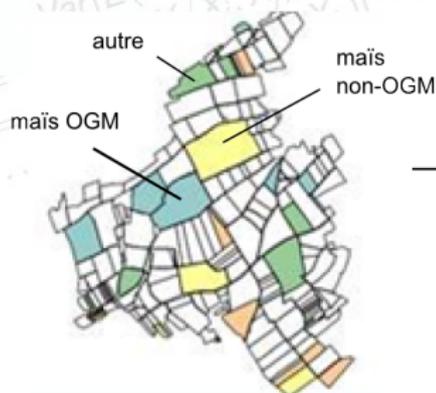
**nombreuses réalisations
aléatoires du parcellaire**

Données vectorielles (points, lignes, polygones)

Illustration : modèle MAPOD

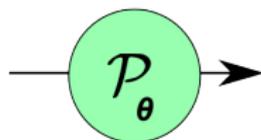
Entrée : carte du parcellaire

- parcelle = polygone de forme variable
- attribut \mathbf{X} qualitatif : OGM / NON-OGM / AUTRE

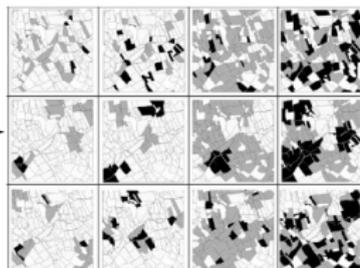


Processus stochastique \mathcal{P}_θ

- θ_1 : géométrie des parcelles
- θ_2 : niveau d'aggrégation spatiale des parcelles OGM
- θ_3 : rapport des surfaces OGM/non OGM



algorithme ad-hoc



Viaud et al. (2008)

nombreuses réalisations aléatoires du parcellaire

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \frac{V_{i_1, i_2, \dots, i_n}}{\text{Var}(Y)}$$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = \int_{-\infty}^t dF(x)$$

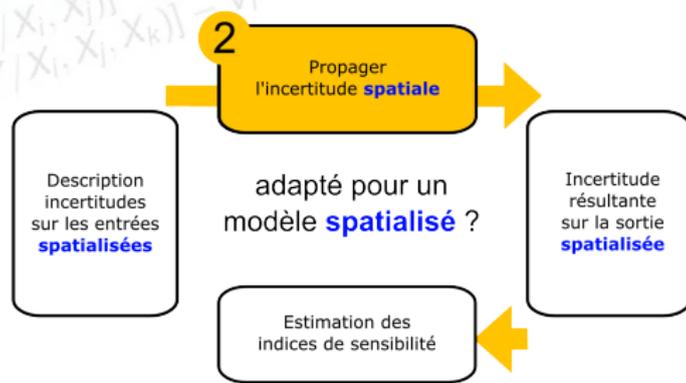
2^{ème} point

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1, \dots, i_s} = 1$$

Comment propager l'incertitude dans un modèle spatialisé ?

$$Y_{\text{obs}} = F^T \text{obs}$$
$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{ij} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j)] = V_i - V_j - V_k$$
$$V_{i,j,k} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j), E(Y/X_k)] = V_i - V_j - V_k$$



$$S_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{V_{i_1 i_2 \dots i_n}}{\text{Var}(Y)}$$

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = \int_{T(x) \leq t} dF(x)$$

$$E(Y^k) = \int (t(x))^k dF(x)$$

$$P(Y > M) = \int_{T(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n} \quad \tilde{\sigma}^2$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

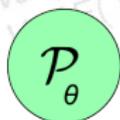
$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

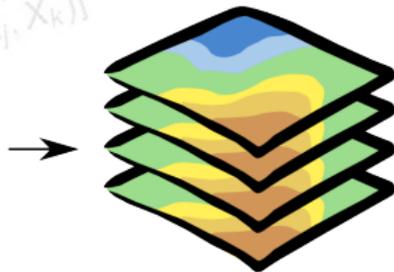
$$\dots$$

Propagation des incertitudes

De quelle incertitude parle-t-on ?



processus
stochastique



n réalisations aléatoires de
l'entrée spatialisée $\mathbf{Z}(s)$

Propagation des incertitudes

De quelle incertitude parle-t-on ?

- variabilité de l'ensemble des n réalisations aléatoires (pour un processus stochastique \mathcal{P}_θ fixé)



processus
stochastique

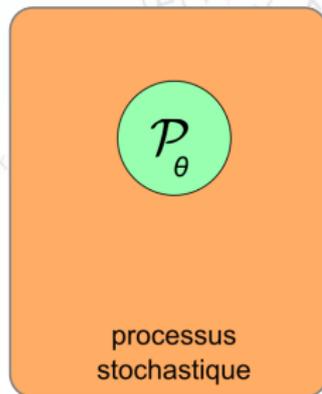


n réalisations aléatoires de
l'entrée spatialisée $Z(s)$

Propagation des incertitudes

De quelle incertitude parle-t-on ?

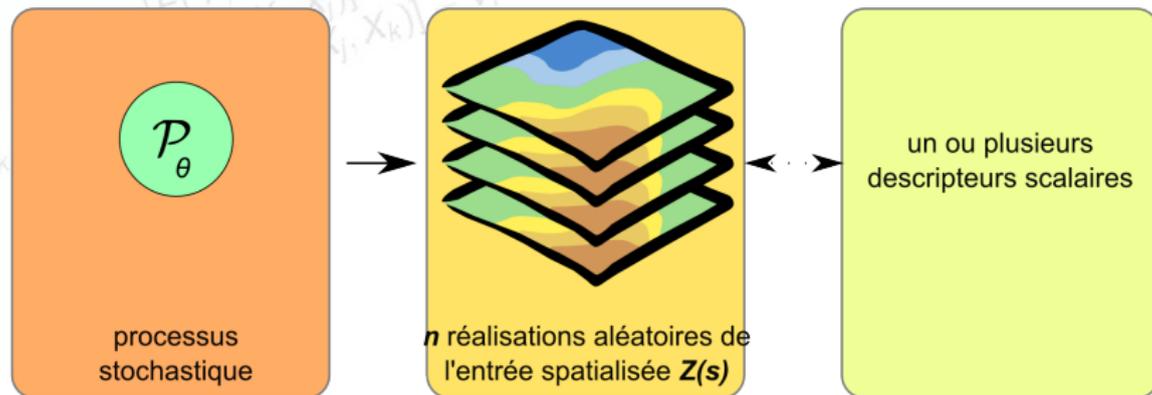
- variabilité de l'ensemble des n réalisations aléatoires (pour un processus stochastique \mathcal{P}_θ fixé)
- incertitude additionnelle sur les paramètres θ du processus \mathcal{P}_θ



Propagation des incertitudes

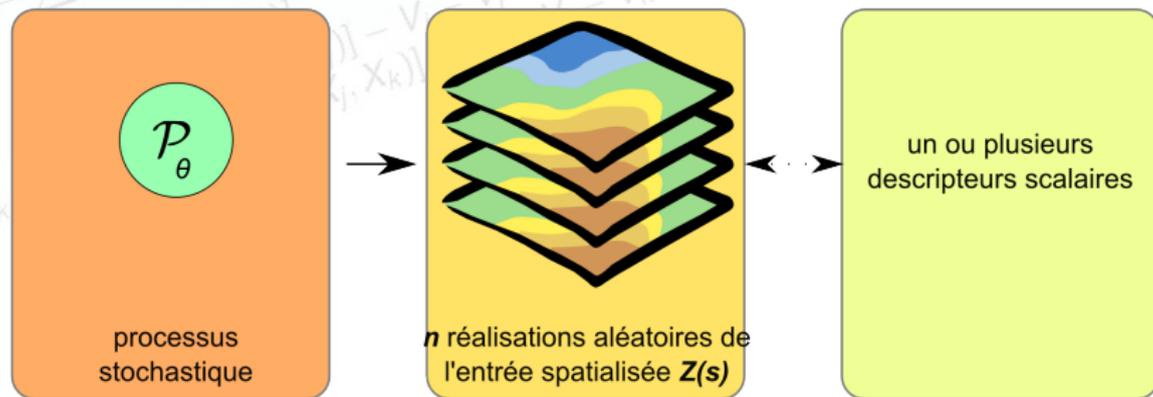
De quelle incertitude parle-t-on ?

- variabilité de l'ensemble des n réalisations aléatoires (pour un processus stochastique \mathcal{P}_θ fixé)
- incertitude additionnelle sur les paramètres θ du processus \mathcal{P}_θ
- incertitude sur quelques descripteurs scalaires de $Z(s)$



Propagation des incertitudes

Méthodes de propagation



Propagation des incertitudes

Méthodes de propagation

- diverses approches rencontrées dans la littérature

**Second
Niveau**

**Macro
Paramètre**

**Réduction
Dimension**

**Etiquetage
de Cartes**

**Métamodèles
Joins**

**Variable
Bascule**

**Descripteurs
de Cartes**

Propagation des incertitudes

Méthodes de propagation

- diverses approches rencontrées dans la littérature
- **entrée spatialisée $Z(s)$** → quelques **entrées scalaires** → utilisation des méthodes usuelles

**Second
Niveau**

**Macro
Paramètre**

**Réduction
Dimension**

**Etiquetage
de Cartes**

**Métamodèles
Joins**

**Variable
Bascule**

**Descripteurs
de Cartes**

Propagation des incertitudes

Méthodes de propagation

- diverses approches rencontrées dans la littérature
- **entrée spatialisée $Z(s)$** → quelques **entrées scalaires** → utilisation des méthodes usuelles

Second
Niveau

Macro
Paramètre

Réduction
Dimension

Etiquetage
de Cartes

Métamodèles
Joins

Variable
Bascule

Descripteurs
de Cartes

Macro-paramètre

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$E(Y^k) = \int_{(0, \infty)} dF(x)$$
$$P(Y > M) = \int_{(M, \infty)} dF(x)$$
$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$
$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

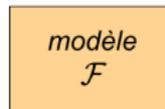
...

entrées non spatialisées

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^k$$



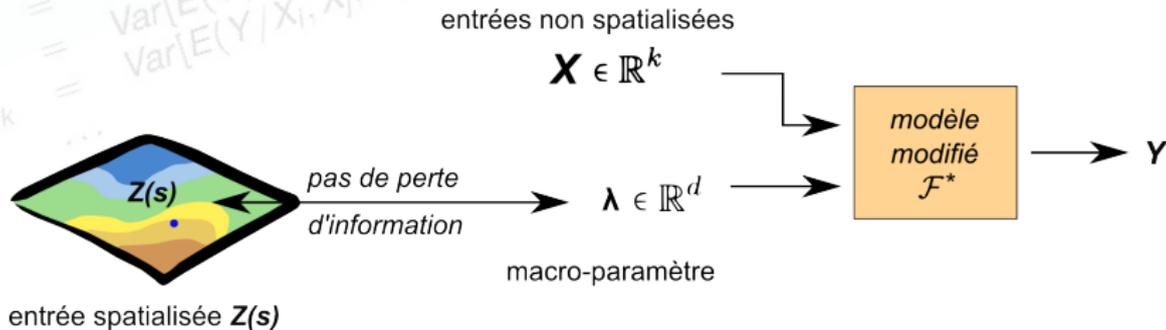
entrée spatialisée $Z(s)$



\mathbf{Y}

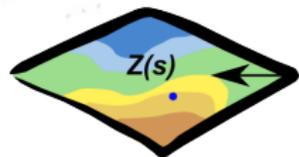
Macro-paramètre

- considérer $Z(s)$ comme un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ (non indépendantes)



Macro-paramètre

- considérer $Z(s)$ comme un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ (non indépendantes)



entrée spatialisée $Z(s)$

pas de perte
d'information

entrées non spatialisées

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^k$$

$$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d$$

macro-paramètre

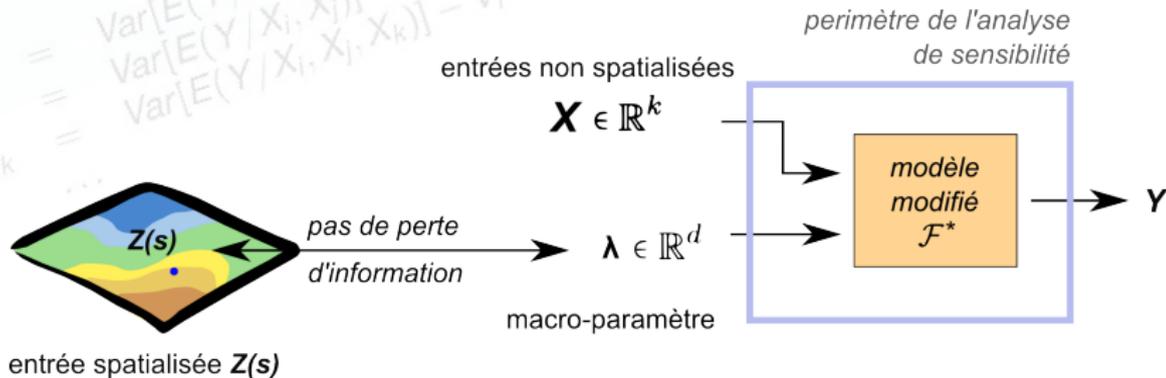
perimètre de l'analyse
de sensibilité

modèle
modifié
 \mathcal{F}^*

\mathbf{Y}

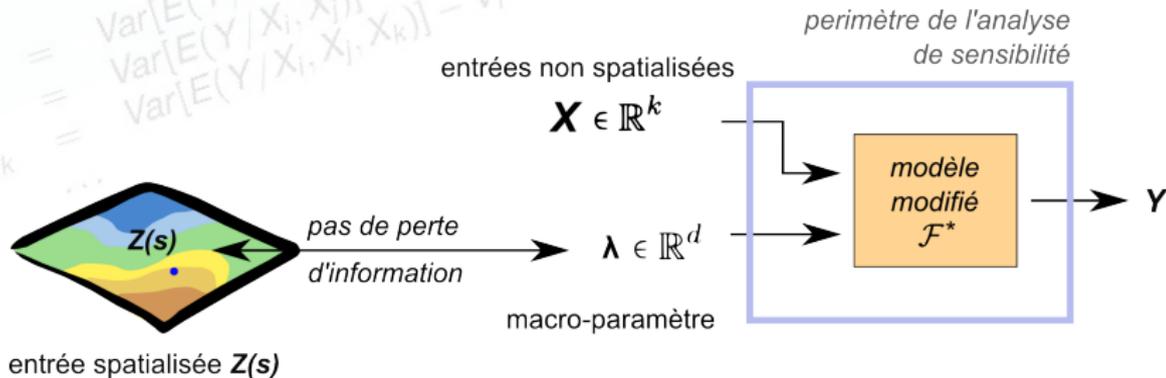
Macro-paramètre

- considérer $Z(s)$ comme un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ (non indépendantes)
- calculer l'**indice de sensibilité S_λ du groupe** $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$



Macro-paramètre

- considérer $Z(s)$ comme un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ (non indépendantes)
- calculer l'**indice de sensibilité S_λ du groupe** ($\lambda_1, \dots, \lambda_d$)
- praticable pour d petit

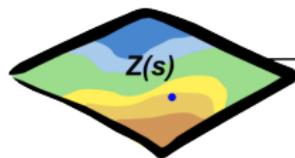


Réduction de la dimension

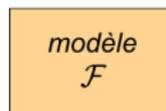
$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$E(Y^k) = \int_{\mathcal{U}(Y)} dF(x)$$
$$P(Y > M) = \int_{\mathcal{U}(x) > M} dF(x)$$
$$Y_{\text{obs}} = F^T \beta + \epsilon$$
$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$
$$\dots$$

entrées non spatialisées

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^k$$



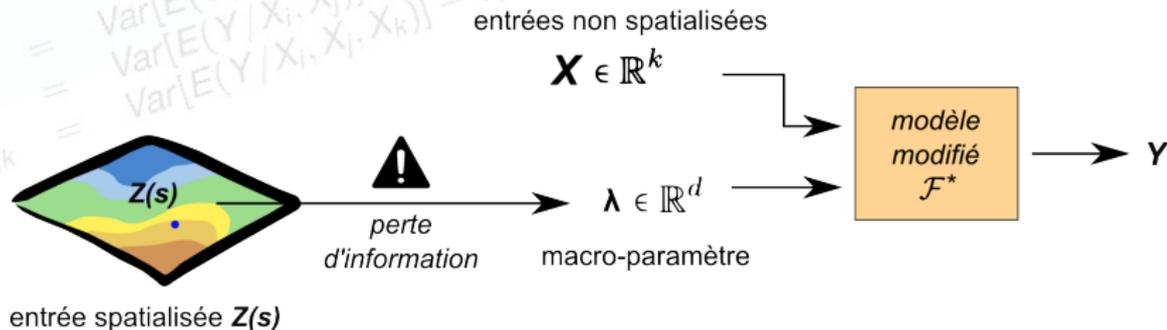
entrée spatialisée $Z(s)$



$\rightarrow Y$

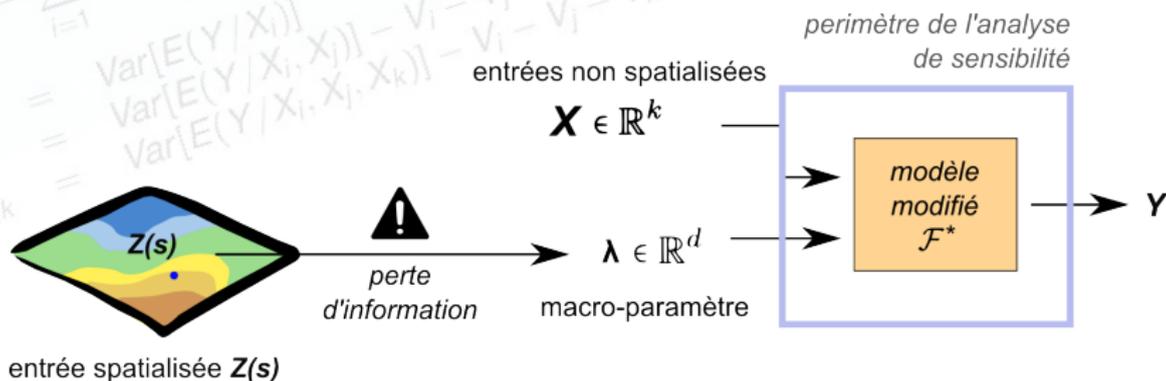
Réduction de la dimension

- **réduire** l'information contenue dans $Z(s)$ à un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (indépendantes ou non)



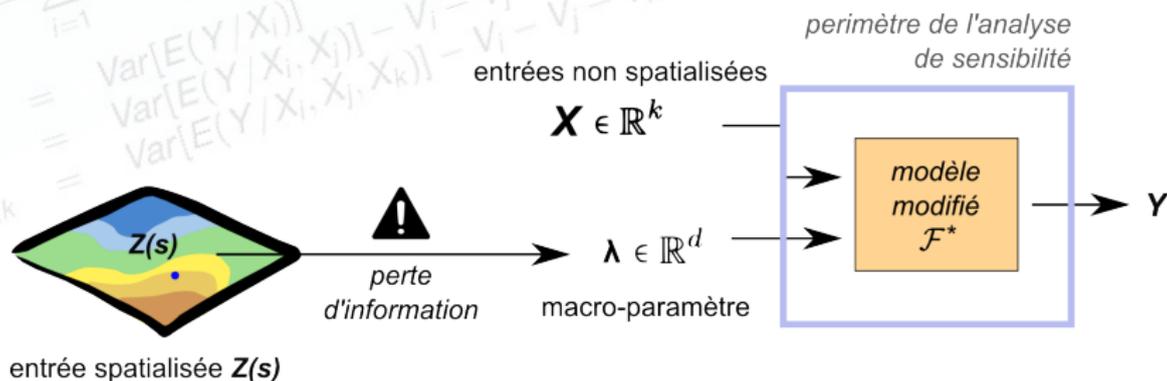
Réduction de la dimension

- **réduire** l'information contenue dans $Z(s)$ à un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (indépendantes ou non)



Réduction de la dimension

- **réduire** l'information contenue dans $Z(s)$ à un ensemble de variables scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (indépendantes ou non)
- calculer l'**indice de sensibilité** S_λ du groupe $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$



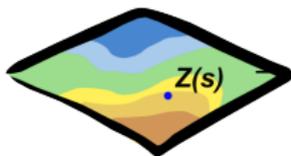
Variable bascule

Crosetto & Tarantola (2001)

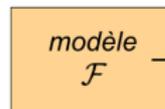
$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = \dots$$
$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} \dots$$
$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$
$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{i,j} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j)]$$
$$V_{i,j,k} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j), E(Y/X_k)]$$

entrées non spatialisées

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^k$$



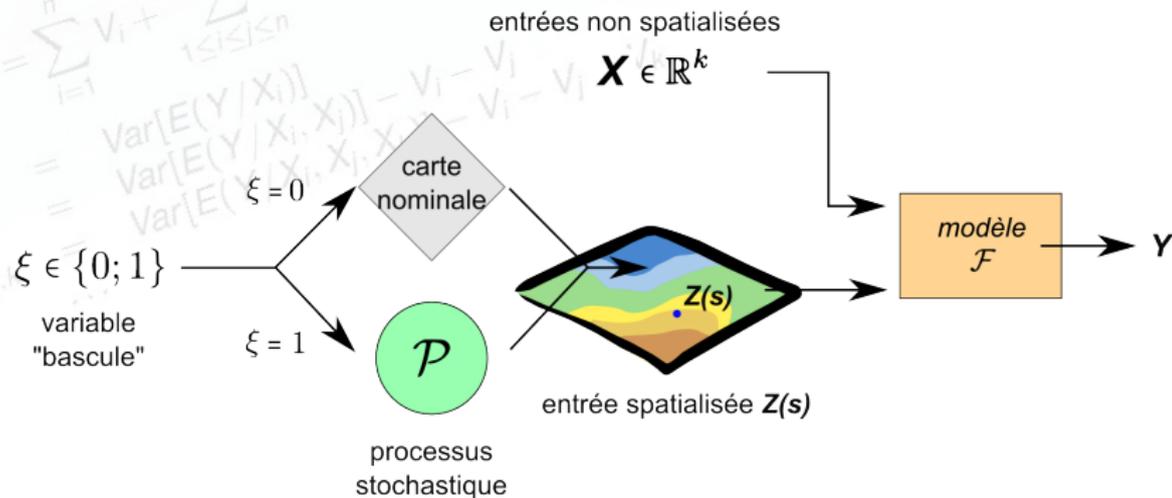
entrée spatialisée $Z(s)$



Y

Variable bascule

Crosetto & Tarantola (2001)

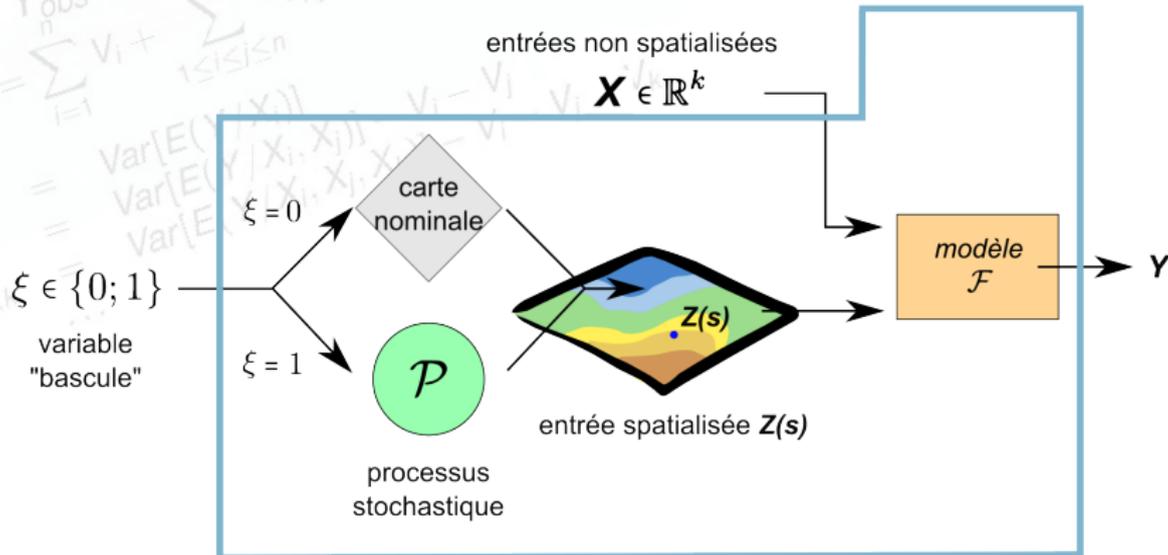


Variable bascule

Crosetto & Tarantola (2001)

- calcul de l'indice de sensibilité S_{ξ} de la variable bascule ξ

perimètre de l'analyse de sensibilité (*modèle stochastique*)

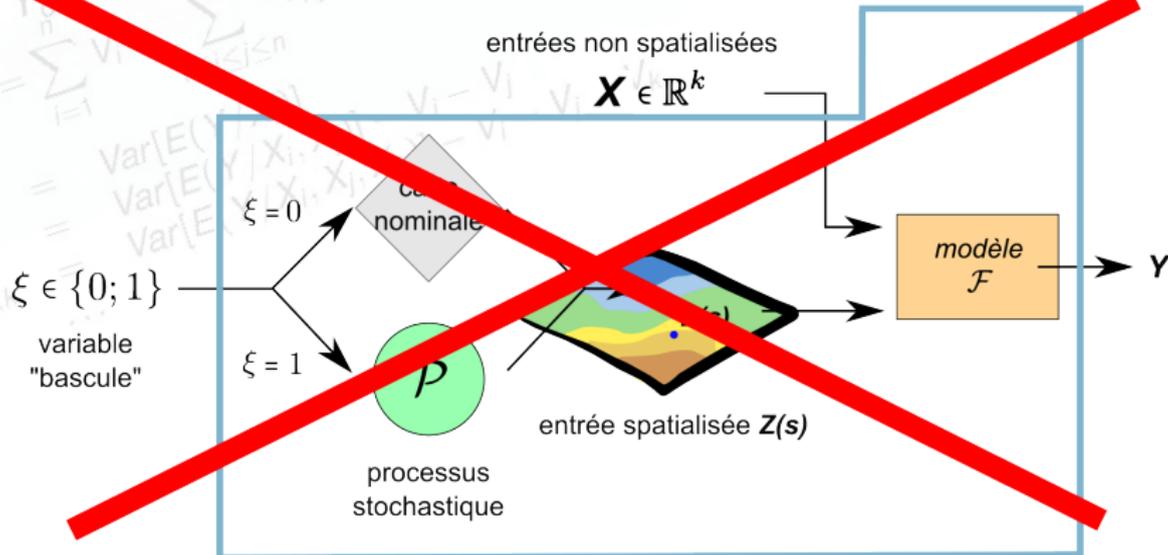


Variable bascule

Crosetto & Tarantola (2001)

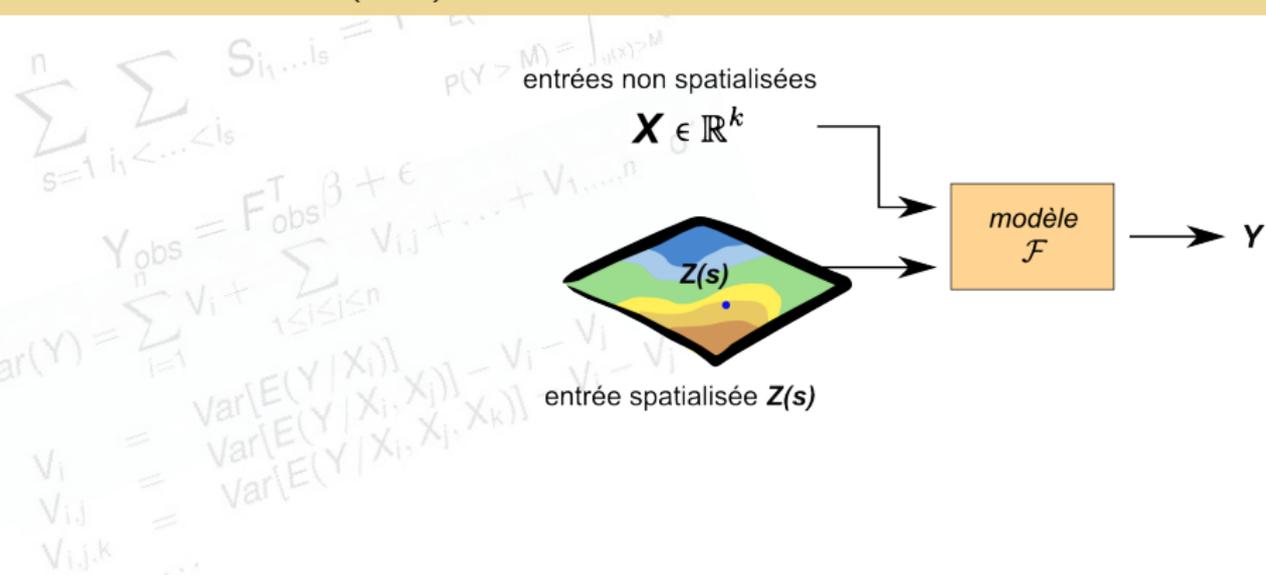
- calcul de l'indice de sensibilité S_{ξ} de la variable bascule ξ
- attention : $S_{\xi} \neq S_Z$!

perimètre de l'analyse de sensibilité (*modèle stochastique*)



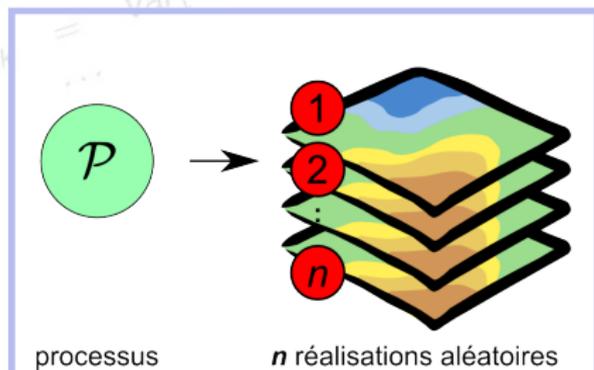
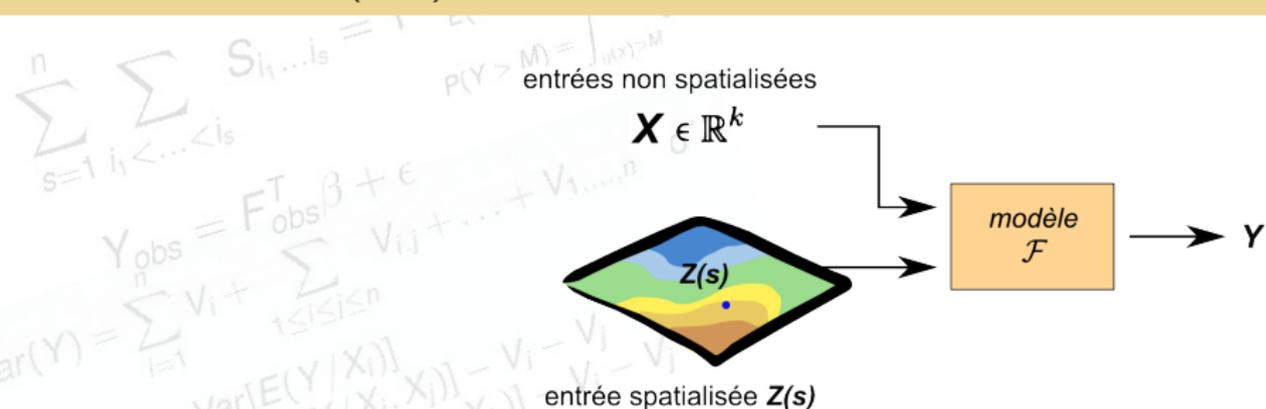
Étiquetage de cartes

Lilburne & Tarantola (2009)



Étiquetage de cartes

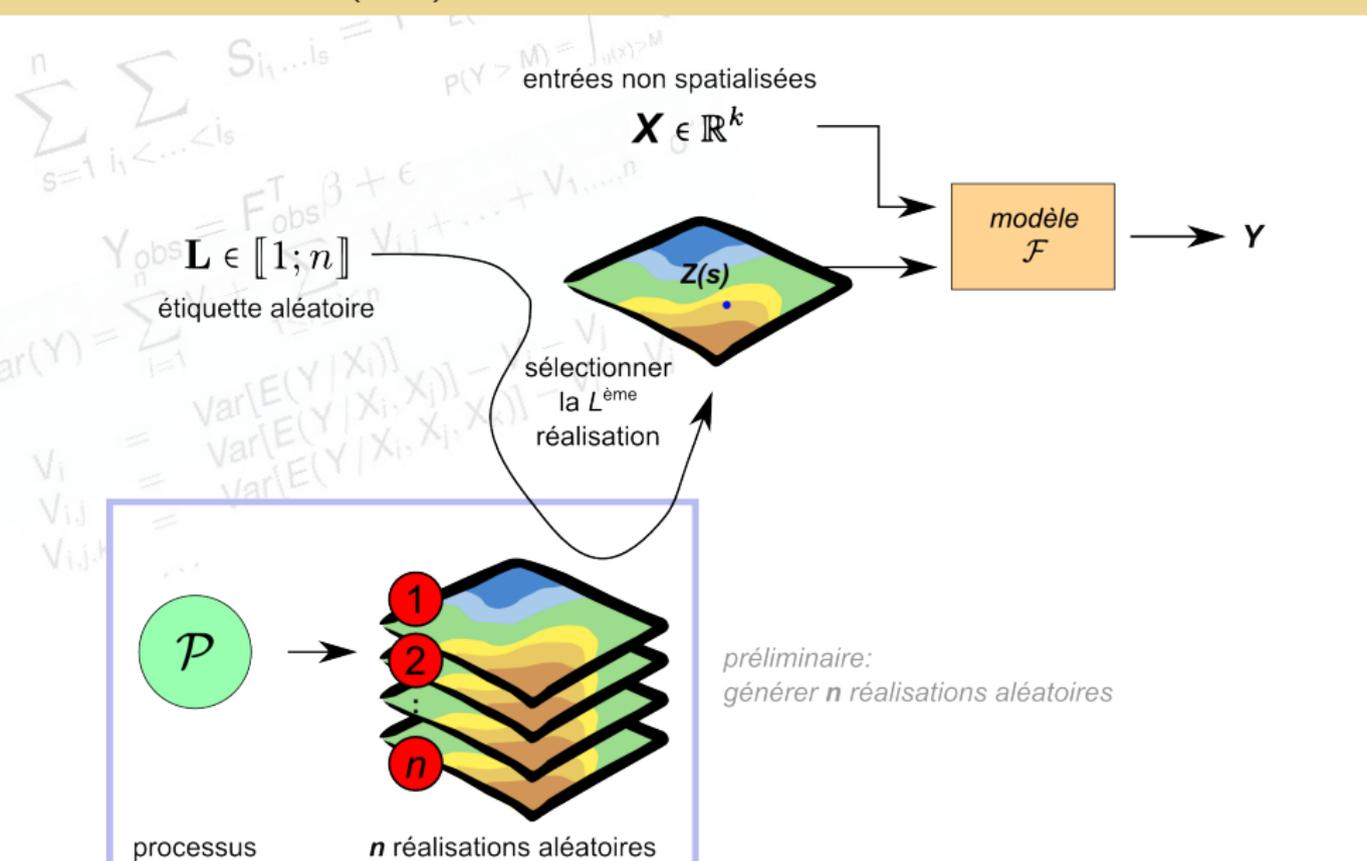
Lilburne & Tarantola (2009)



préliminaire:
générer n réalisations aléatoires

Étiquetage de cartes

Lilburne & Tarantola (2009)



Étiquetage de cartes

Lilburne & Tarantola (2009)

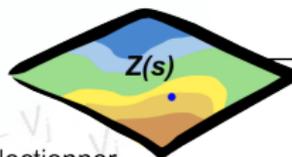
indice de sensibilité S_L

$L \in \llbracket 1; n \rrbracket$

étiquette aléatoire

entrées non spatialisées

$X \in \mathbb{R}^k$



sélectionner
la $L^{\text{ème}}$
réalisation

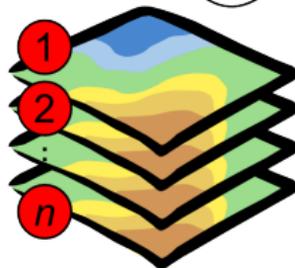
modèle
 \mathcal{F}

Y

périmètre de l'analyse de sensibilité



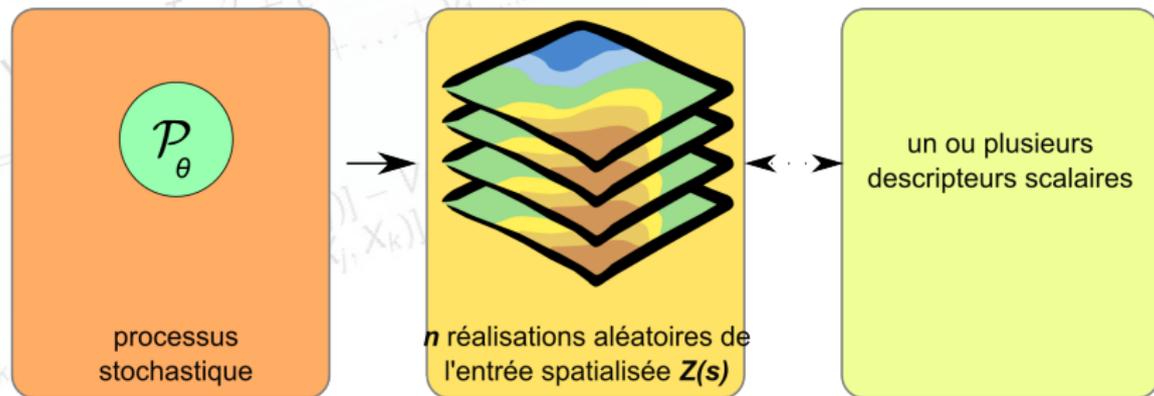
processus



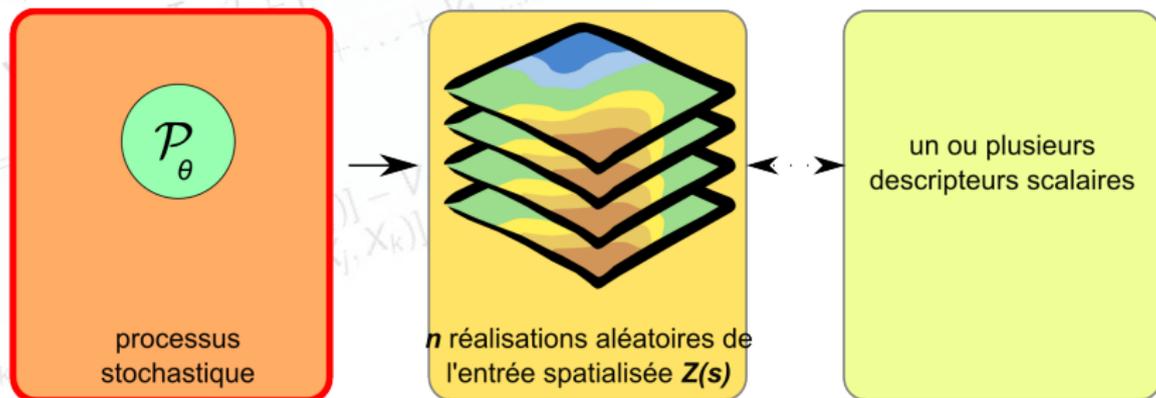
n réalisations aléatoires

préliminaire:
générer n réalisations aléatoires

Propagation des incertitudes



Propagation des incertitudes

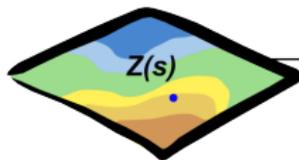


Propagation d'incertitude de second niveau

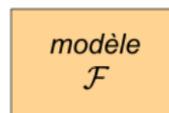
$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$E(Y^*) = \int_{\Omega} dF(x)$$
$$P(Y > M) = \int_{\{x \mid Y > M\}} dF(x)$$
$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$
$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{ij} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j)]$$
$$V_{i,j,k} = \text{Cov}[E(Y/X_i, X_j), E(Y/X_i, X_j, X_k)]$$
$$\dots$$

entrées non spatialisées

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^k$$



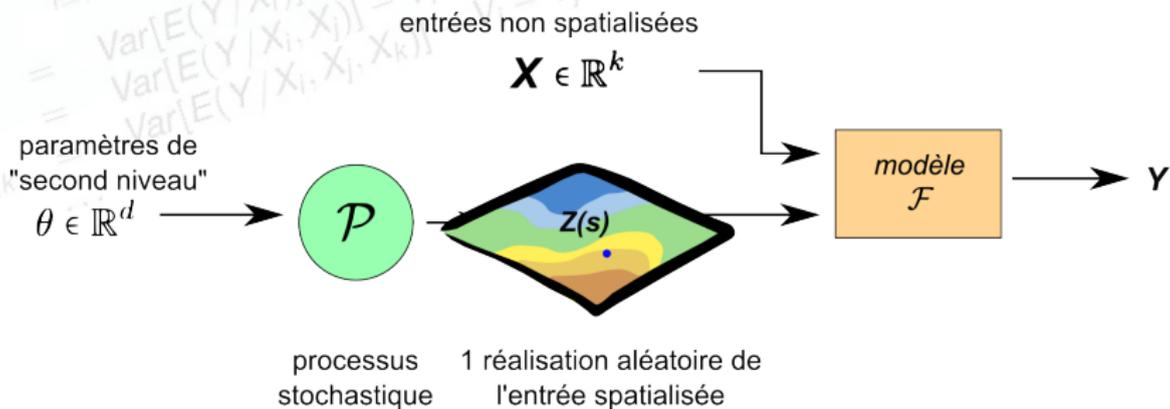
entrée spatialisée $Z(s)$



$\longrightarrow Y$

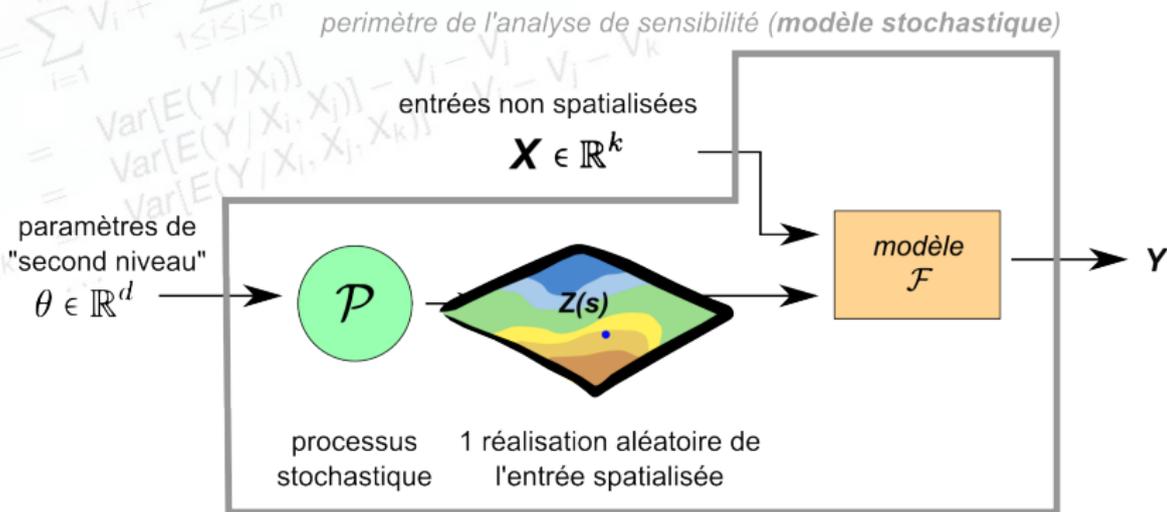
Propagation d'incertitude de second niveau

- échantillonnage des paramètres θ_j du processus stochastique \mathcal{P}_θ (supposés **indépendants**)



Propagation d'incertitude de second niveau

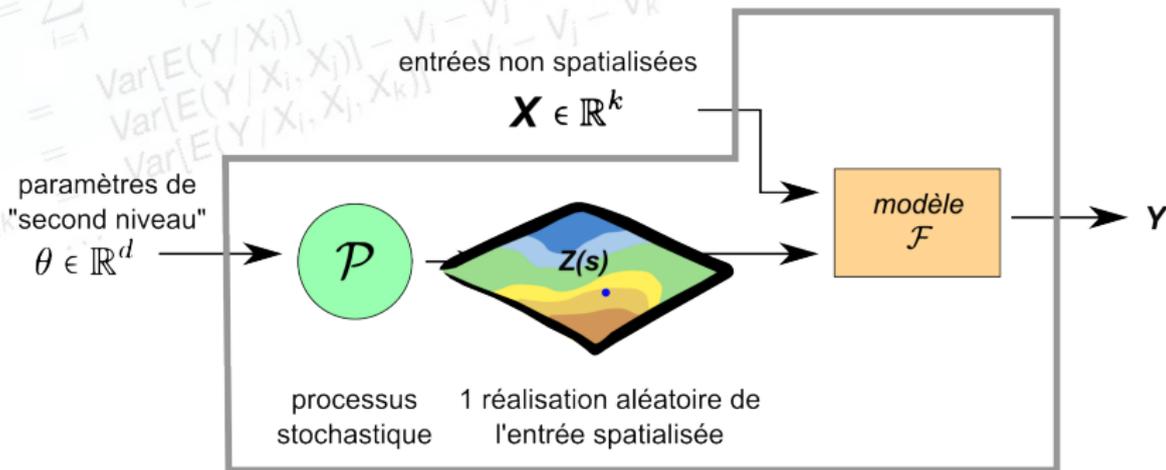
- échantillonnage des paramètres θ_j du processus stochastique \mathcal{P} (supposés **indépendants**)
- on analyse un nouveau modèle qui est **stochastique** !



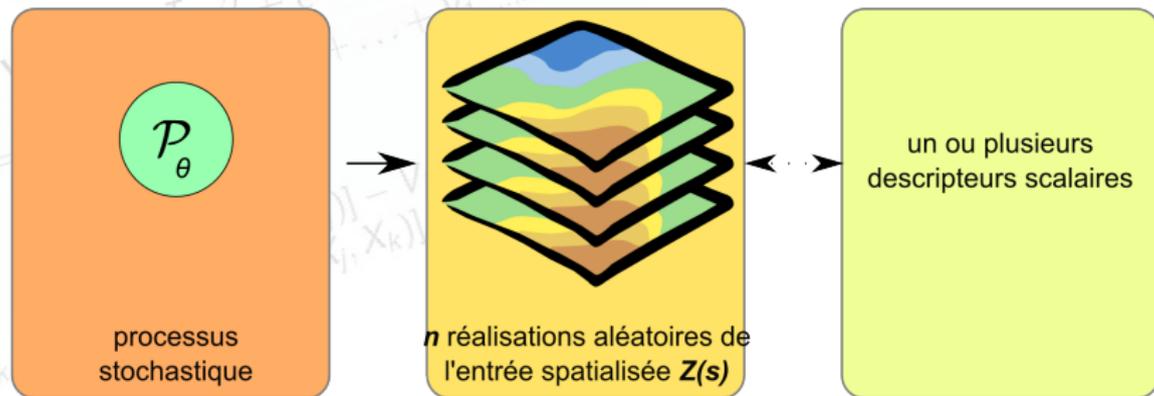
Propagation d'incertitude de second niveau

- échantillonnage des paramètres θ_j du processus stochastique \mathcal{P} (supposés **indépendants**)
- on analyse un nouveau modèle qui est **stochastique** !
- **attention** : $S_\theta \neq S_Z$!

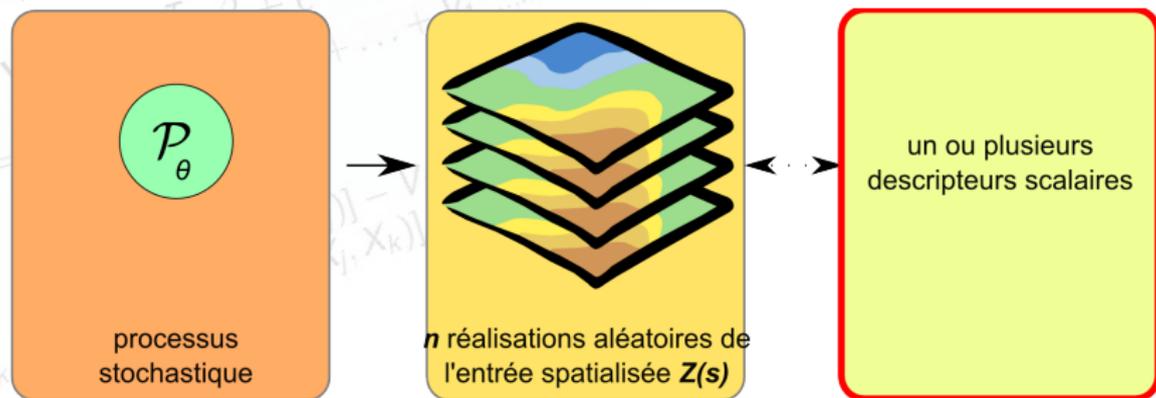
perimètre de l'analyse de sensibilité (modèle stochastique)



Propagation des incertitudes



Propagation des incertitudes



Descripteurs de cartes

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^k) = \int_{0}^{\infty} x^k dF(x)$$

$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

Descripteurs de cartes

La variable d'entrée spatialisée $Z(s)$ est influente...

...quelle sont les caractéristiques de $Z(s)$ les plus importantes ?

Descripteurs de cartes

La variable d'entrée spatialisée $Z(s)$ est influente...

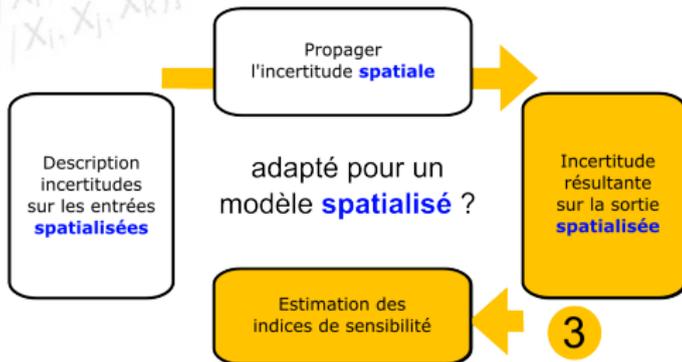
...quelle sont les caractéristiques de $Z(s)$ les plus importantes ?

- **descripteurs** de $Z(s)$, notés α_i : observables **a posteriori**, **non contrôlables**, souvent **corrélées** :
 - min, max, moyenne
 - valeur de $Z(s)$ en un point spécifique
 - propriétés géométriques...
- n'importe quelle technique de régression ou autre pour étudier la relation $Y - \alpha_i$

Choix d'une méthode

- "dimension" de $Z(s)$?
- possibilité de réduire l'information contenue dans $Z(s)$?
- prise en compte de l'autocorrélation spatiale ?
- nombre d'entrées spatialisées ?
- "coût" d'une réalisation aléatoire de $Z(s)$?
- quels indices de sensibilité veut-on obtenir ?

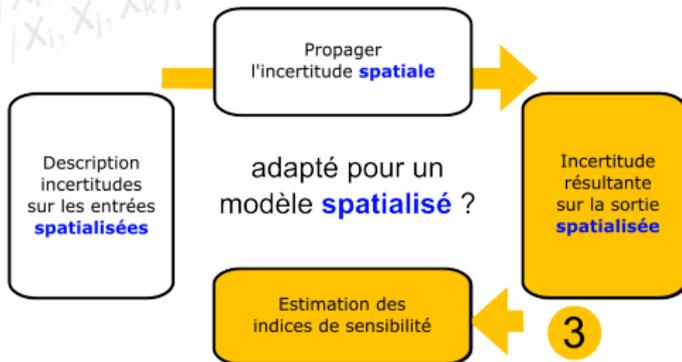
Quels indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$?



3^{ème} point

Quels indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$?

→ 3 stratégies possibles



Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^*) = \int_{(0, \infty)} \dots$$

$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 1 : indices de sensibilité **ponctuels**

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} V_{i,j,k} + \dots$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 1 : indices de sensibilité **ponctuels**

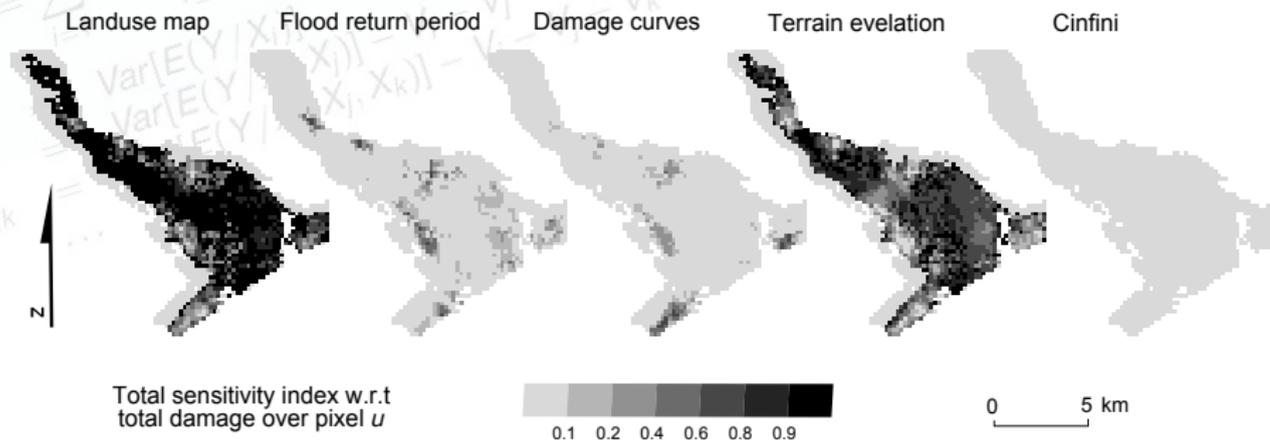
- calcul de $S_i(s)$ par rapport à $Y(s)$ **en tout point** $s \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots \\ V_i &= \text{Var}[E(Y/X_i)] \\ V_{i,j} &= \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j \\ V_{i,j,k} &= \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k \\ &\dots \end{aligned}$$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 1 : indices de sensibilité **ponctuels**

- calcul de $S_i(s)$ par rapport à $Y(s)$ **en tout point** $s \in \mathcal{D}$
- **cartes d'indices de sensibilité** $\mathcal{S}_i = \{S_i(s), s \in \mathcal{D}\}$



Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^*) = \int_{0}^{+\infty} P(Y > M) dF(x)$$

$$P(Y > M) = \int_{f(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 2 : indices de sensibilité **agrégés**

Lamboni *et al.* (2011)

Idée : moyenne pondérée des indices de sensibilité ponctuels $S_i(s)$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 2 : indices de sensibilité **agrégés**

Lamboni *et al.* (2011)

Idée : moyenne pondérée des indices de sensibilité ponctuels $S_i(s)$

- valeurs de $Y(s)$ en **M points** s_1, \dots, s_M , pour **N runs**

Stratégie 2 : indices de sensibilité **agrégés**

Lamboni *et al.* (2011)

Idée : moyenne pondérée des indices de sensibilité ponctuels $S_i(s)$

- valeurs de $Y(s)$ en **M points** s_1, \dots, s_M , pour **N runs**
- **Analyse en Composantes Principales** du tableau $M \times N$
→ K composantes $Y^{(1)}, \dots, Y^{(K)}$ avec inerties I_1, \dots, I_K

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 2 : indices de sensibilité **agrégés**

Lamboni *et al.* (2011)

Idée : moyenne pondérée des indices de sensibilité ponctuels $S_i(s)$

- valeurs de $Y(s)$ en **M points** s_1, \dots, s_M , pour **N runs**
- **Analyse en Composantes Principales** du tableau $M \times N$
→ K composantes $Y^{(1)}, \dots, Y^{(K)}$ avec inerties I_1, \dots, I_K
- calcul des indices de sensibilité **pour chaque composante**

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 2 : indices de sensibilité **agrégés**

Lamboni *et al.* (2011)

Idée : moyenne pondérée des indices de sensibilité ponctuels $S_i(s)$

- valeurs de $Y(s)$ en **M points** s_1, \dots, s_M , pour **N runs**
- **Analyse en Composantes Principales** du tableau $M \times N$
→ K composantes $Y^{(1)}, \dots, Y^{(K)}$ avec inerties l_1, \dots, l_K
- calcul des indices de sensibilité **pour chaque composante**
- construction d'un **indicateur agrégé** \mathbb{S}_i

$$\mathbb{S}_i = \frac{1}{\sum_k l_k} \sum_{k=1}^K S_i(Y^{(k)}) \cdot l_k$$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^*) = \int_{0}^{U(x)} dF(x)$$

$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

- sortie en **un point particulier** $s^* \in \mathcal{D}$: $Y^* = Y(s^*)$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

- sortie en **un point particulier** $s^* \in \mathcal{D}$: $Y^* = Y(s^*)$
- sortie **agrégée** sur un certain **support spatial** $\nu \subset \mathcal{D}$

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

- sortie en **un point particulier** $s^* \in \mathcal{D}$: $Y^* = Y(s^*)$
- sortie **agrégée** sur un certain **support spatial** $\nu \subset \mathcal{D}$
 - valeur min/max
 - valeur moyenne
 - etc.

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

- sortie en **un point particulier** $s^* \in \mathcal{D} : Y^* = Y(s^*)$
- sortie **agrégée** sur un certain **support spatial** $\nu \subset \mathcal{D}$
 - valeur min/max
 - valeur moyenne
 - etc.
- mesures de surface, de connexité, d'aggrégation, etc.

Indices de sensibilité pour une sortie spatialisée $Y(s)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire $Y^* \in \mathbb{R}$

- sortie en **un point particulier** $s^* \in \mathcal{D} : Y^* = Y(s^*)$
- sortie **agrégée** sur un certain **support spatial** $\nu \subset \mathcal{D}$
 - valeur min/max
 - valeur moyenne
 - etc.
- mesures de surface, de connexité, d'aggrégation, etc.

→ indices de sensibilité $S_i(Y^*)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1 \quad F_Y(x)$$

$$E(Y^*) = \int_{(x)} \dots$$

$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n} \quad \tilde{0}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

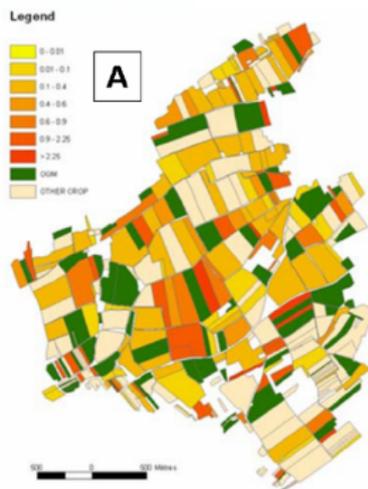
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Ex : modèle MAPOD

- Y_1^* = taux moyen $\bar{\tau}$ de pollinisation OGM \rightarrow non OGM
- Y_2^* = part des parcelles non-OGM t.q. $\tau < 0.9\%$
- Y_3^* = part des parcelles non-OGM t.q. $\tau < 0.1\%$



Sortie spatialisée: taux de pollinisation OGM par parcelle

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^*) = \int_{(x)} \dots$$

$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

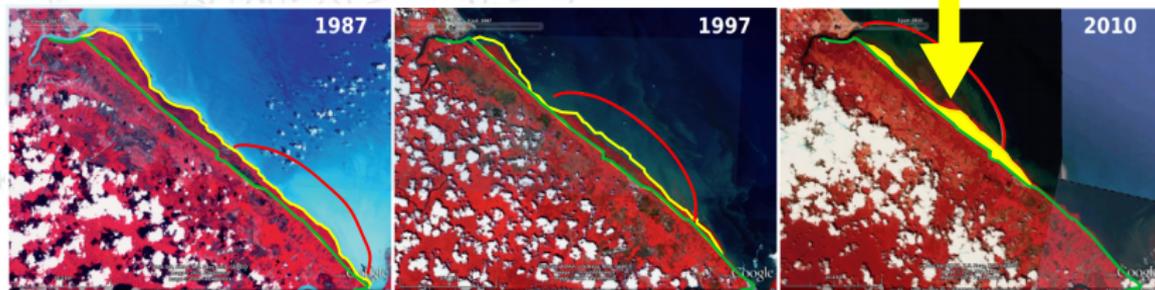
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Ex : modèle OCELET

- $Y^* =$ aire totale de la mangrove à t_{final}



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^*) = \int_{(x)} \dots$$

$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

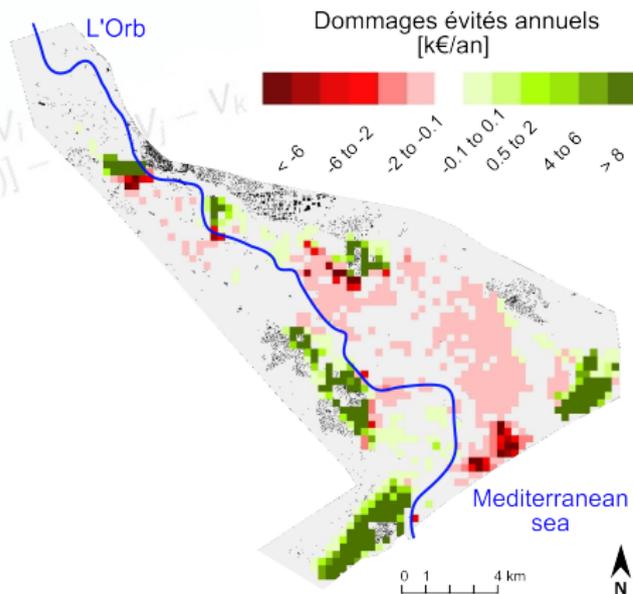
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Ex : modèle NOE

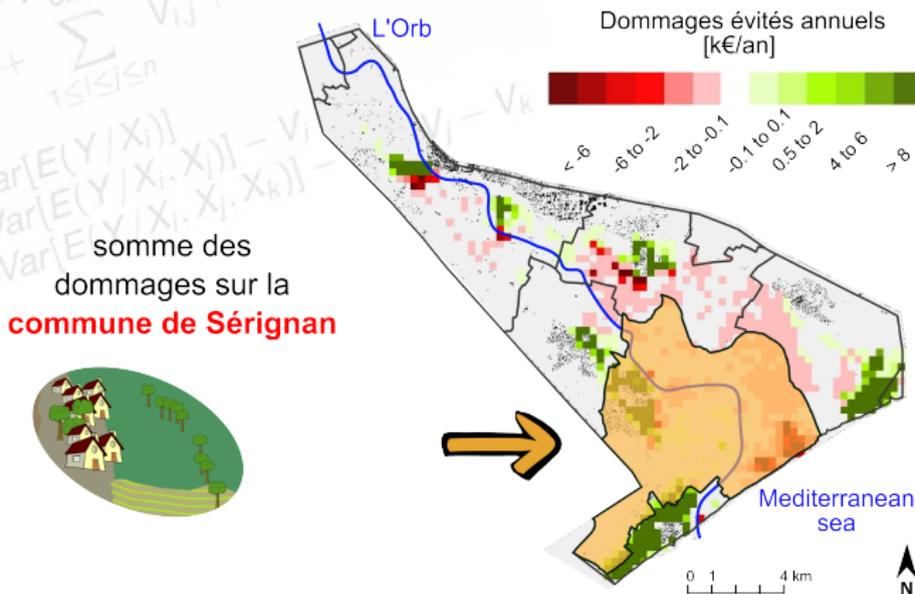
- Y_ν^* = somme des dommages sur une zone $\nu \subset \mathcal{D}$
- indice de sensibilité **zonaux** $S_Z(\nu)$ et $S_X(\nu)$



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Ex : modèle NOE

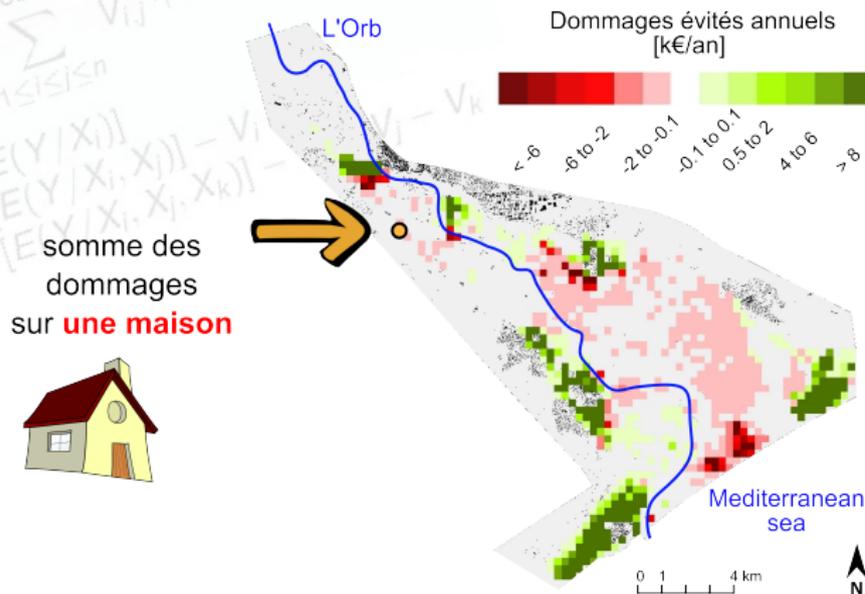
- Y_ν^* = somme des dommages sur une zone $\nu \subset \mathcal{D}$
- indice de sensibilité **zonaux** $S_Z(\nu)$ et $S_X(\nu)$



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Ex : modèle NOE

- Y_ν^* = somme des dommages sur une zone $\nu \subset \mathcal{D}$
- indice de sensibilité **zonaux** $S_Z(\nu)$ et $S_X(\nu)$



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M}$$
$$Y_{n \text{ obs}} = F T_{\text{obs}} \beta + \epsilon$$
$$\text{ar}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{ij} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j)]$$
$$V_{i,j,k} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j), E(Y/X_k)]$$
$$\dots$$



une maison



commune de Sérignan



bassin versant

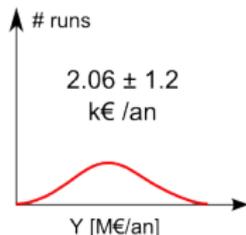
Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

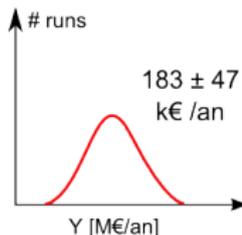
$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$P(Y > M) = \int_{m(x) > M}$$
$$Y_{n \text{ obs}} = FT_{\text{obs}} \beta + \epsilon$$
$$\text{ar}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{ij} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j)]$$
$$V_{i,j,k} = \text{Cov}[E(Y/X_i), E(Y/X_j), E(Y/X_k)]$$



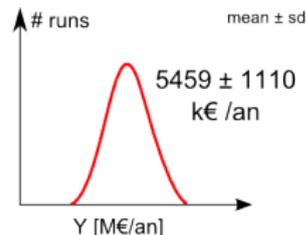
une maison



commune de Sérignan



bassin versant



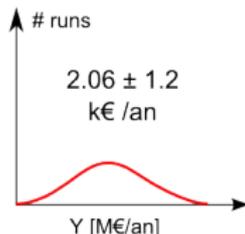
Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

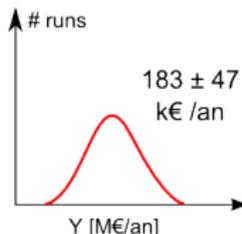
● plus faible coeff. de variation sur une grande zone



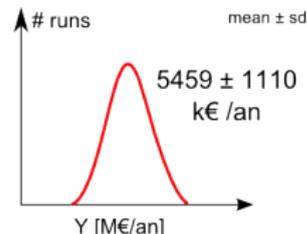
une maison



commune de Sérignan



bassin versant



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

- plus faible coeff. de variation sur une grande zone



une maison



commune de Sérignan



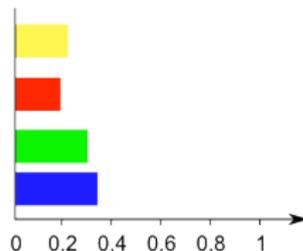
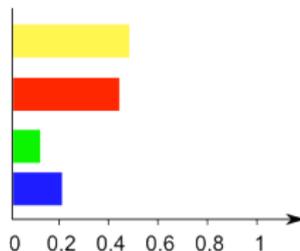
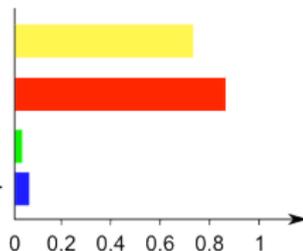
bassin versant

Carte occ. sol.

Cartes d'aléa

Tables endom.

Périodes de retour



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

- plus faible coeff. de variation sur une grande zone
- entrées spatialisées : $S_i(\text{bassin versant}) < S_i(\text{commune}) < S_i(\text{maison})$



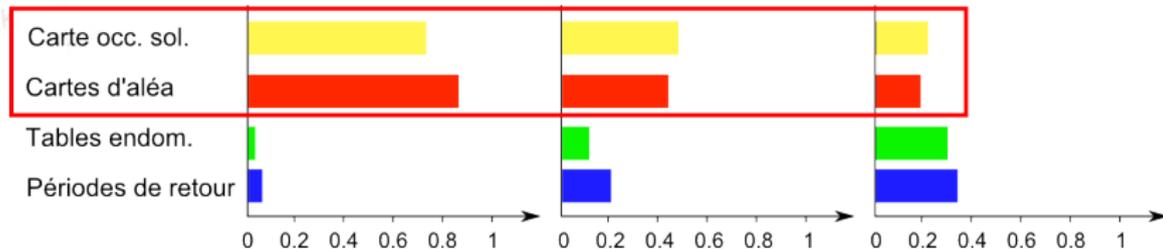
une maison



commune de Sérignan



bassin versant



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

- plus faible coeff. de variation sur une grande zone
- entrées spatialisées : $S_i(\text{bassin versant}) < S_i(\text{commune}) < S_i(\text{maison})$
- entrées non-spatialisées : $S_i(\text{bassin versant}) > S_i(\text{commune}) > S_i(\text{maison})$



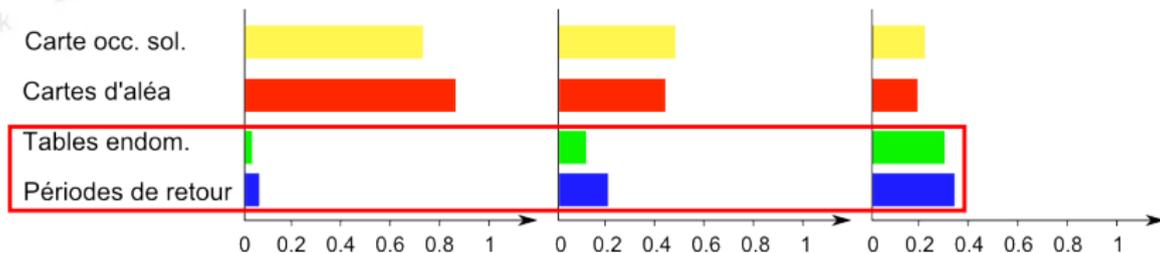
une maison



commune de Sérignan



bassin versant



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

- plus faible coeff. de variation sur une grande zone
- entrées spatialisées : $S_i(\text{bassin versant}) < S_i(\text{commune}) < S_i(\text{maison})$
- entrées non-spatialisées : $S_i(\text{bassin versant}) > S_i(\text{commune}) > S_i(\text{maison})$

Effet de support

moyennage des incertitudes spatialisées
lorsque le support spatial est grand

les indices de sensibilité zonaux
dépendent du support v

une
Carte occ. sol.
Cartes d'aléa
Tables endom.
Périodes de retour



Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$
$$P(Y > M) = \int_{n(x) > M}$$
$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$
$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$
$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$
$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$
$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$
$$\dots$$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

On a (pour un modèle *point-based*) :

$$\frac{S_Z(\nu)}{S_U(\nu)} = \frac{\nu_c}{|\nu|}$$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

On a (pour un modèle *point-based*) :

$$\frac{S_Z(\nu)}{S_U(\nu)} = \frac{\nu_c}{|\nu|}$$

Plus grand support $\nu \rightarrow$ moyennage des erreurs locales \rightarrow faible $S_Z(\nu)$

Stratégie 3 : se ramener à une sortie scalaire Y^*

Changements d'échelle - effets de support

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

On a (pour un modèle *point-based*) :

$$\frac{S_Z(\nu)}{S_U(\nu)} = \frac{\nu_c}{|\nu|}$$

Plus grand support $\nu \rightarrow$ moyennage des erreurs locales \rightarrow faible $S_Z(\nu)$

Surface critique ν_c

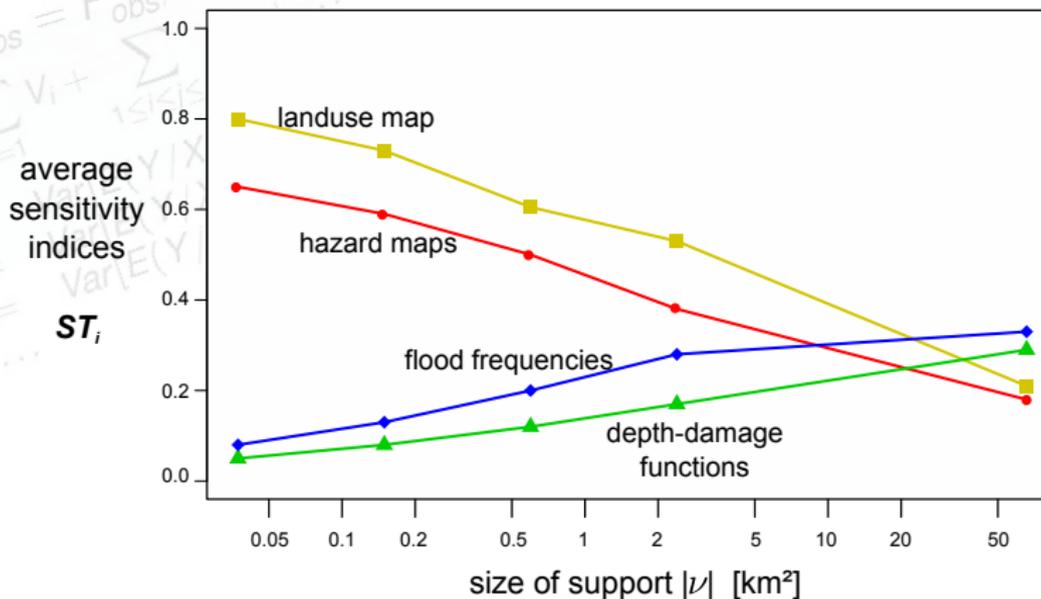
$$\nu_c = \frac{S_Z}{S_U} \cdot \phi[C(\cdot)]$$

indices de sensibilité
ponctuels

autocorrélation spatiale
de l'entrée $Z(s)$

Changements d'échelle - effets de support

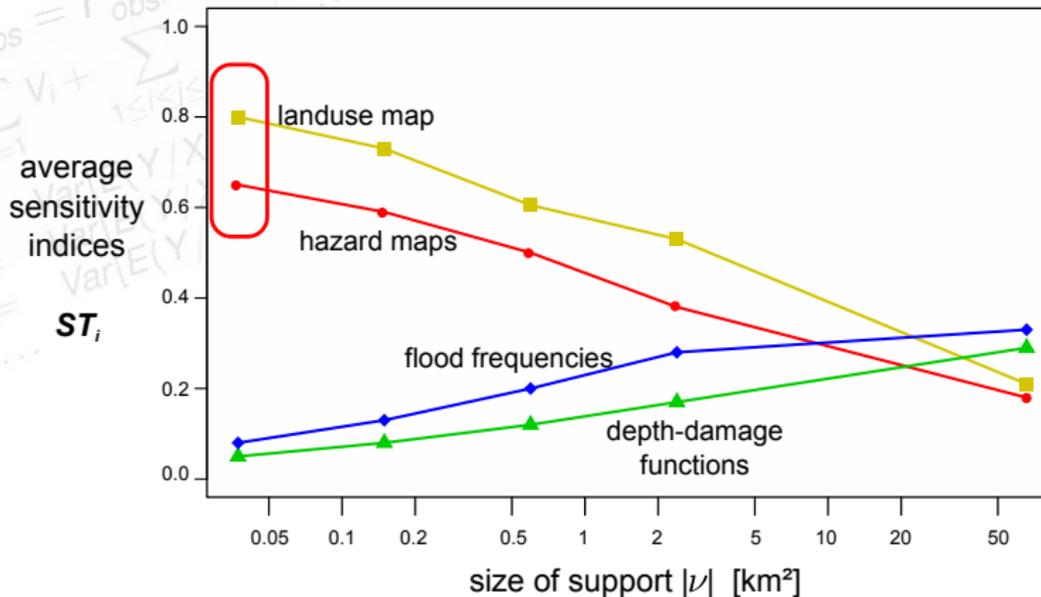
Illustration sur le modèle NOE



Changements d'échelle - effets de support

Illustration sur le modèle NOE

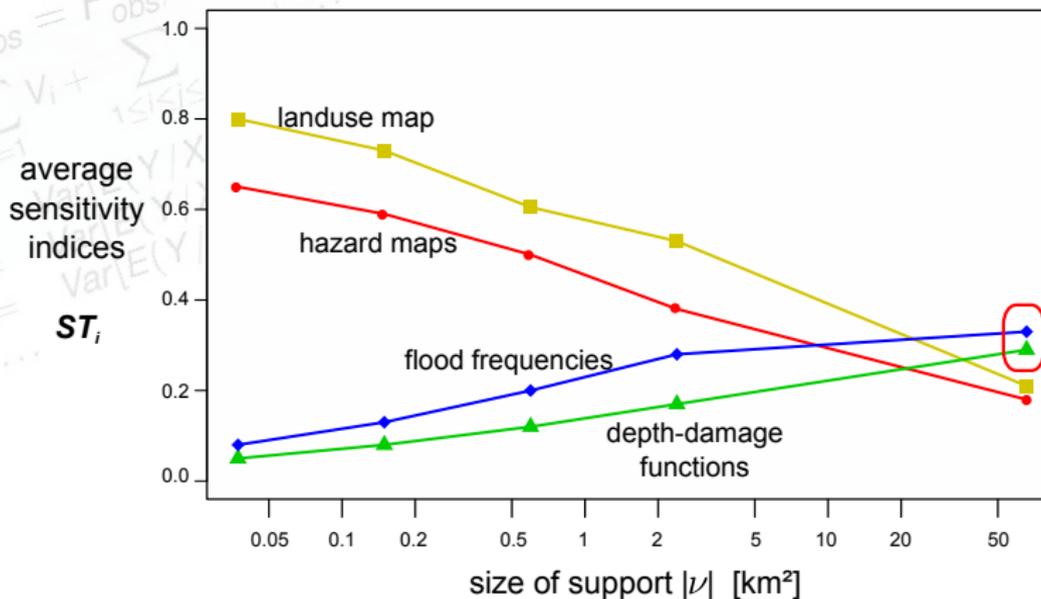
- facteur clé à grande échelle : occ. sol et cartes d'aléa



Changements d'échelle - effets de support

Illustration sur le modèle NOE

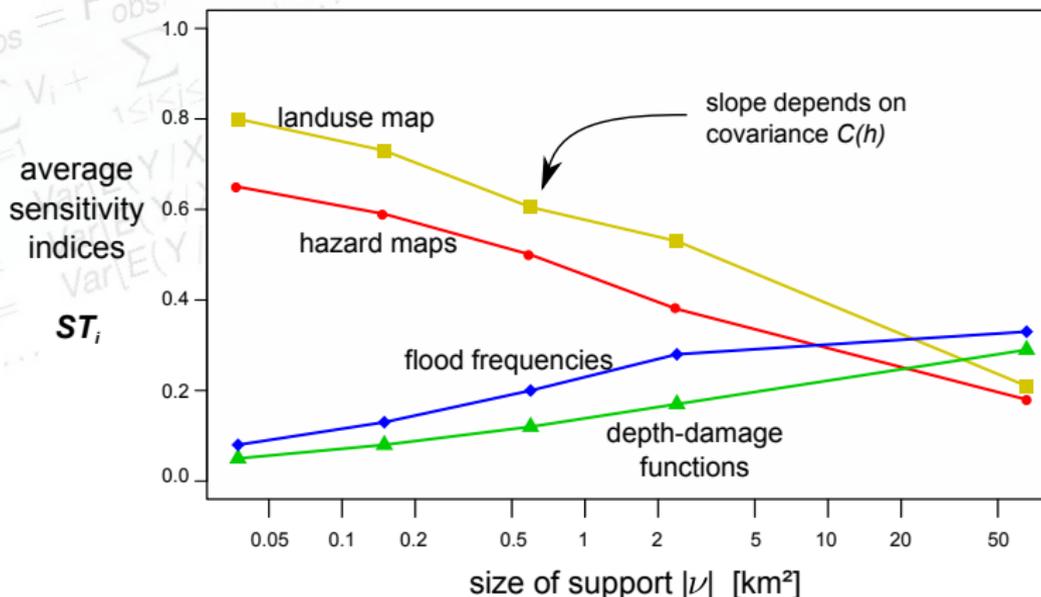
- facteur clé à grande échelle : occ. sol et cartes d'aléa
- facteur clé à petite échelle : périodes de retour



Changements d'échelle - effets de support

Illustration sur le modèle NOE

- facteur clé à grande échelle : occ. sol et cartes d'aléa
- facteur clé à petite échelle : périodes de retour



$$S_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{V_{i_1 i_2 \dots i_n}}{\text{Var}(Y)}$$

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = \int_{T(x) \leq t} dF(x)$$

$$E(Y^k) = \int (t(x))^k dF(x)$$

$$P(Y > M) = \int_{T(x) > M} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n} \quad \tilde{o}$$

En conclusion

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

$$\dots$$

En conclusion...

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1$$

$$E(Y^k) = \int_{0}^{\infty} x^k dF(x)$$

$$P(Y > M) = \int_{M}^{\infty} dF(x)$$

$$Y_{\text{obs}} = F_{\text{obs}}^T \beta + \epsilon$$

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1, \dots, n}$$

$$V_i = \text{Var}[E(Y/X_i)]$$

$$V_{i,j} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j)] - V_i - V_j$$

$$V_{i,j,k} = \text{Var}[E(Y/X_i, X_j, X_k)] - V_i - V_j - V_k$$

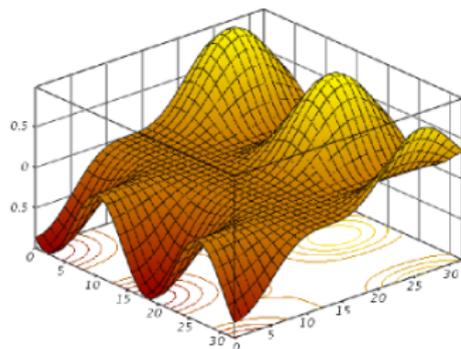
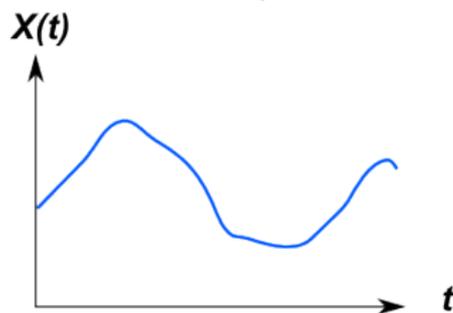
$$\dots$$

En conclusion...

Extensions possibles

- entrées/sorties temporelles
- entrées fonctionnelles

entrée temporelle



entrée fonctionnelle

En conclusion...

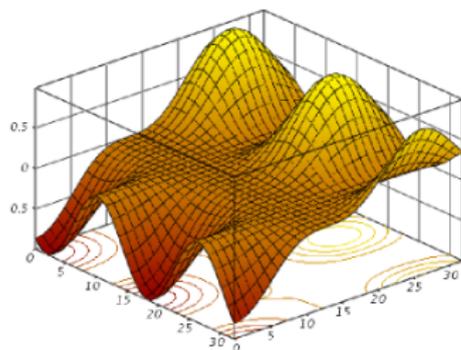
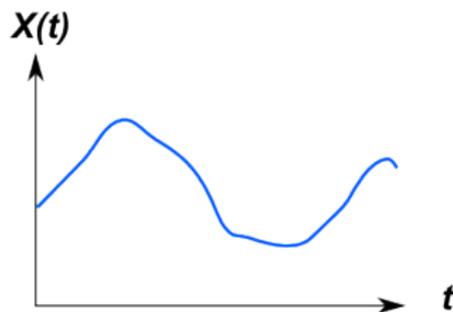
Extensions possibles

- entrées/sorties temporelles
- entrées fonctionnelles

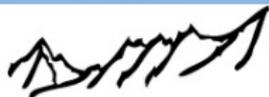
Mais...

- des « recettes » empiriques utiles pour la pratique
- besoin de meilleures assises théoriques

entrée temporelle



entrée fonctionnelle



MaiMoSiNE

Groupement de Recherche

MASCOT-NUM

Méthodes d'Analyse Stochastique pour
les COdes et Traitements NUMériques



Analyse de sensibilité spatialisée

Nathalie Saint-Geours
Irstea - UMR TETIS,
Montpellier

École de Physique des Houches

9 Avril 2013

Indices de sensibilité zonaux et effet de support



Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

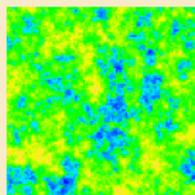
$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

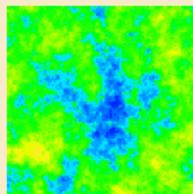
Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$



2D error field

range a ↗
→

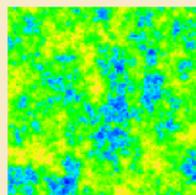


Indices de sensibilité zonaux et effet de support

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

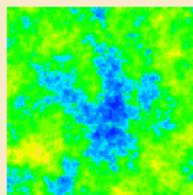
Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$



2D error field

range a ↗
→



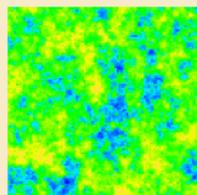
less averaging

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

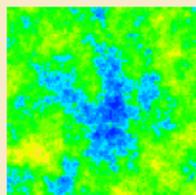
Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$



2D error field

range a ↗



less averaging



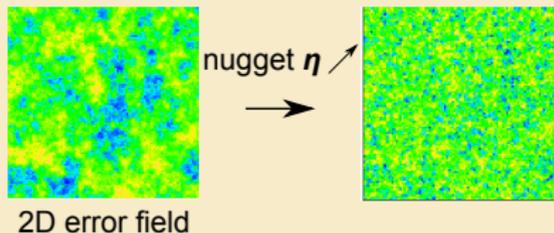
$$\begin{aligned} \nu_c &\nearrow \\ S_Z(\nu) &\nearrow \end{aligned}$$

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$

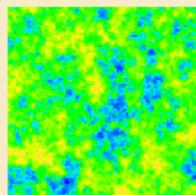


Indices de sensibilité zonaux et effet de support

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

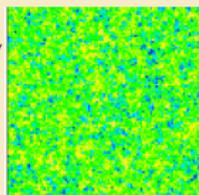
Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$



2D error field

nugget η ↗
→



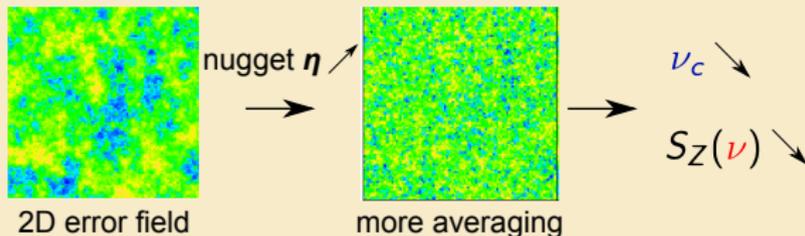
more averaging

Indices de sensibilité zonaux et effet de support

Influence de la structure de covariance spatiale de $Z(s)$

Supposons $Z(s)$ un champ aléatoire Gaussien.
avec une **portée** a et une **pépite** η .

$$\frac{\partial \nu_c}{\partial a} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \nu_c}{\partial \eta} < 0$$



Méta-modèles joints

Iooss & Ribatet (2009)

- entrée $Z(s)$ considérée comme *variable incontrôlable*
- construction de deux méta-modèles :
 - un méta-modèle sur $\mathbb{E}(Y | \mathbf{X})$
 - un méta-modèle sur $\text{var}(Y | \mathbf{X})$
- extraction d'un indice de sensibilité S_Z

Comparaison des méthodes

Method	# of map realisations needed	# of model runs needed	Coupling with a meta-model is possible	Possibility to cope with several spatial inputs	Sensitivity indices associated with $Z(\mathbf{x})$	Possibility to model spatial auto-correlation in $\{Z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega\}$	Comments
Macro-parameter	N	$N \cdot (k + 1 + 2)$	No	Yes	indices of the group of inputs $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}}$	No	Possibly intractable for large data
Dimension reduction (with groups)	N	$N \cdot (k + 1 + 2)$	No	Yes	indices of the group of inputs $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}}$	No	Simplification of the input data
Dimension reduction (without groups)	N	$N \cdot (k + d + 2)$	Yes	Yes	indices of each input $\lambda_i, i = 1 \dots d$	No	Simplification of the input data
Trigger	$\sim N/2$	$N \cdot (k + 1 + 2)$	No	Yes	indices of the trigger input ξ	Yes	Sensitivity indices do not have the same meaning
Map labelling	$n < N$	$N \cdot (k + 1 + 2)$	No	Yes	indices of the label input \mathbf{L}	Yes	Spatially distributed input $Z(\mathbf{x})$ is under-sampled compared to other inputs
Joint GAM metamodel	$\ll N$	$\ll N$	Yes	No	total-order index ST_Z only	Yes	Use of a metamodel
Second level	N	$N \cdot (k + d + 2)$	Yes	Yes	indices of second level parameters θ_i	Yes	Sensitivity indices do not have the same meaning