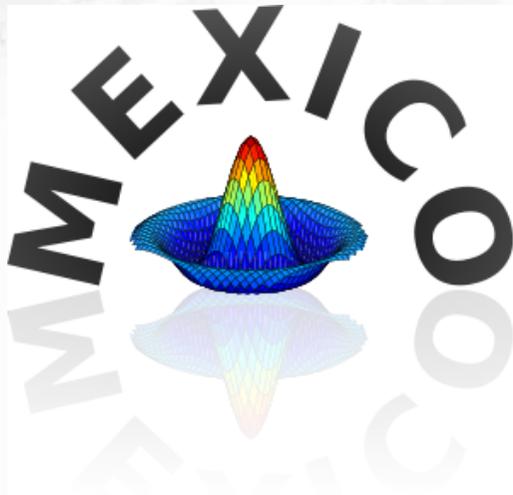


MaiMoSiNE



Enjeux et méthodes de l'exploration des modèles



Bertrand Iooss - Amandine Marrel

EDF R&D

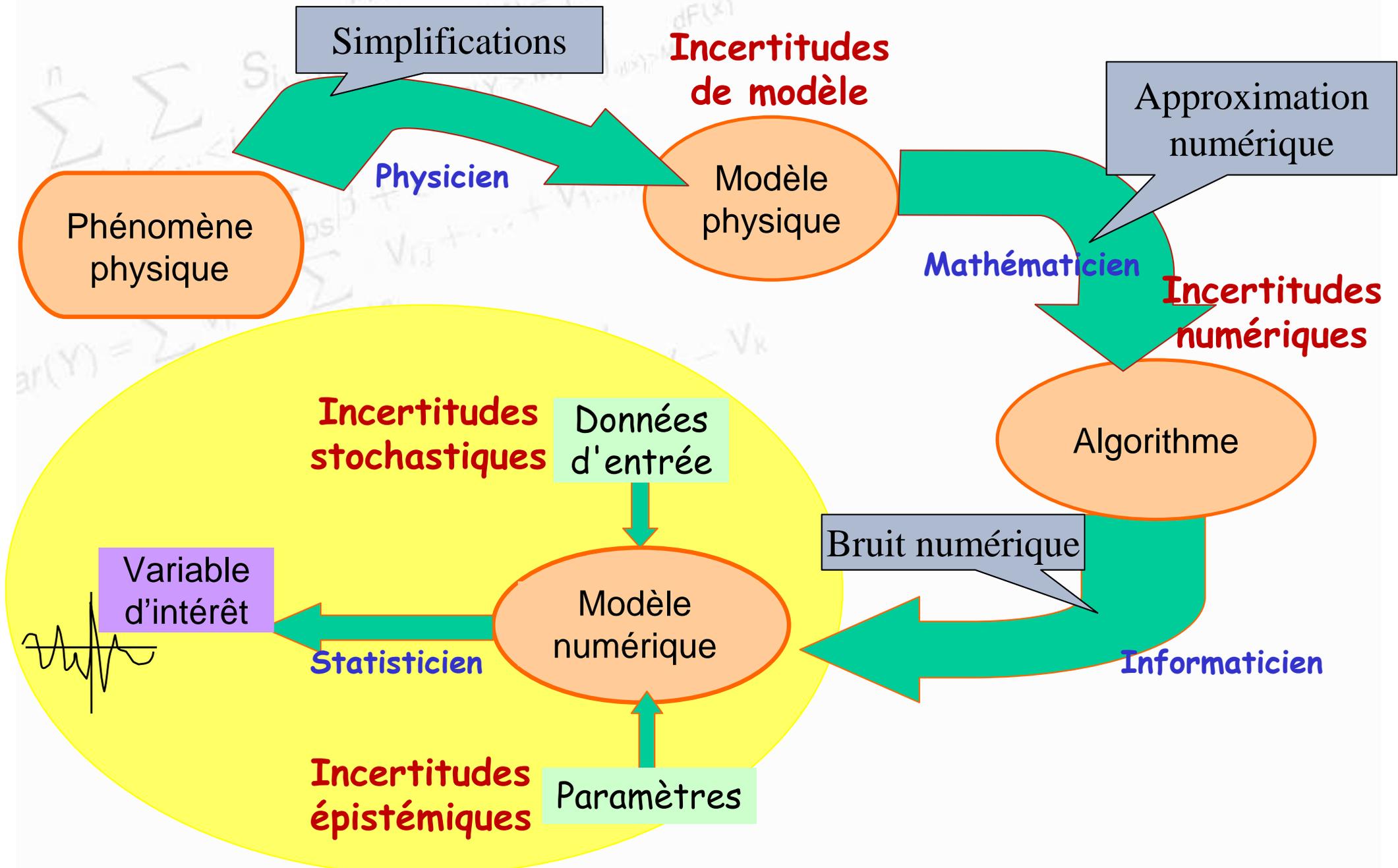
CEA Cadarache

Ecole de Physique des Houches

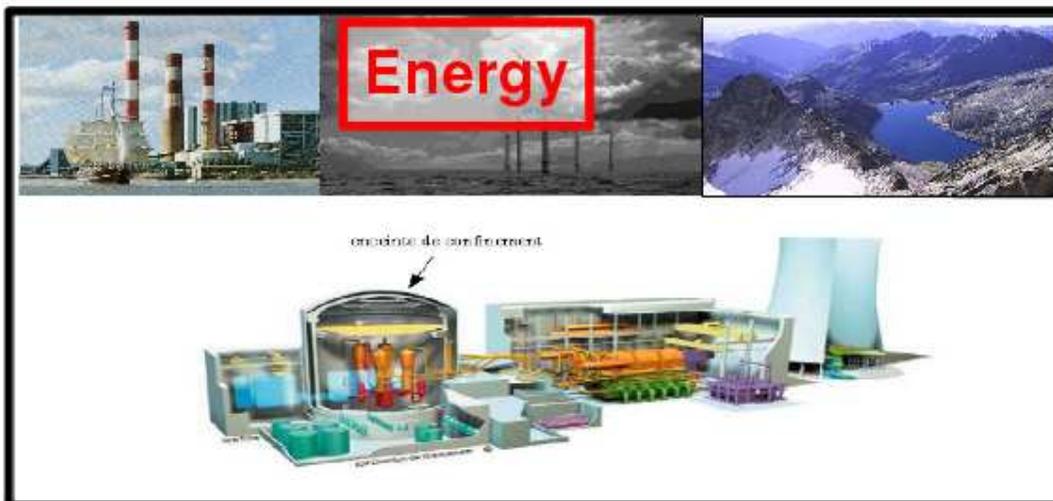
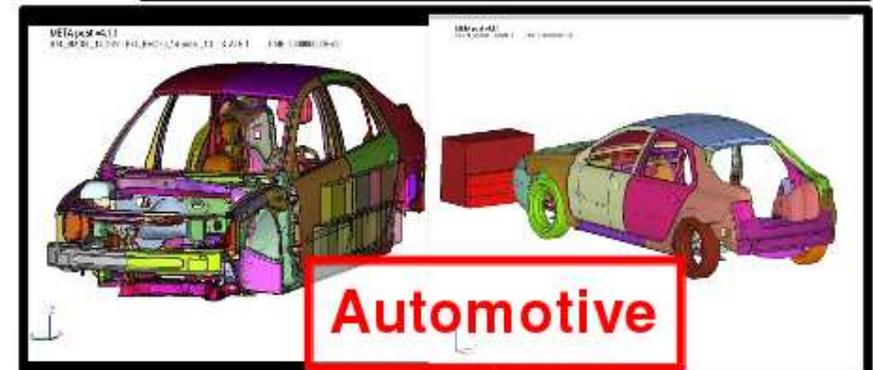
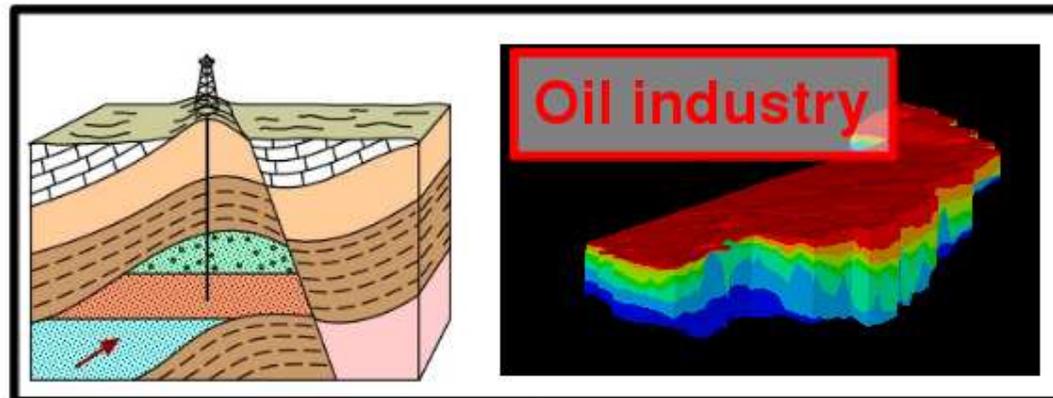
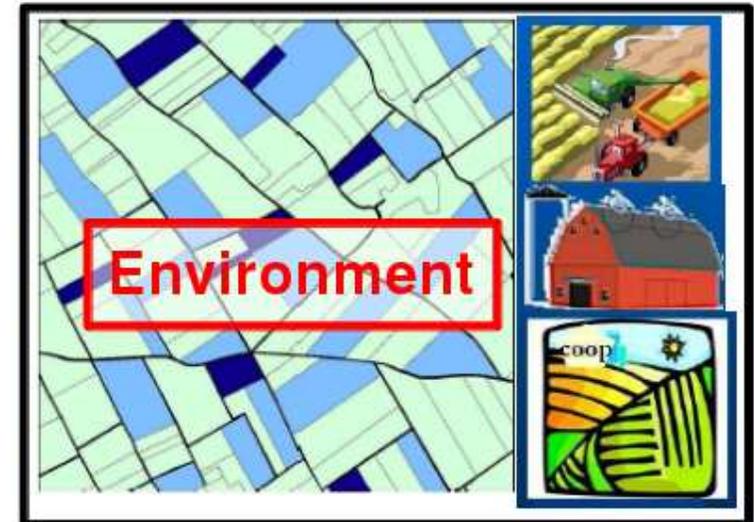
8 Avril 2013

Les incertitudes en modélisation numérique

Crédibilité des résultats issus d'un modèle physico-numérique ?



Une problématique multi-sectorielle



Enjeux du traitement des incertitudes en simulation numérique

- **Modélisation :**

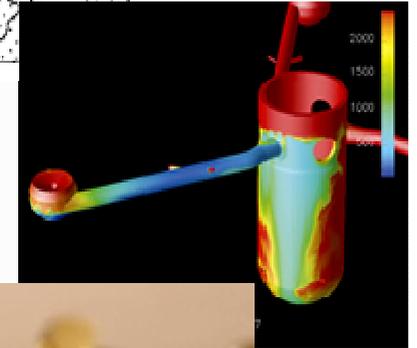
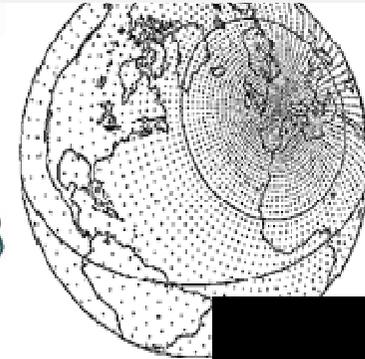
- explorer au mieux différentes combinaisons des entrées
- identifier les entrées influentes pour **prioriser la R&D**
- améliorer le modèle

- **Validation :**

- réduire l'incertitude de prédiction
- calibrer les paramètres du modèle

- **Utilisation :**

- **Étude de sûreté :** calculer un **risque** de défaillance (événements rares)
- **Étude de conception :** optimiser **les performances** d'un système



Exemple 1 : simulation de rupture d'un barrage (1/2)

Objectif : évaluer la cote maximale de l'eau et le temps d'arrivée de l'onde de submersion

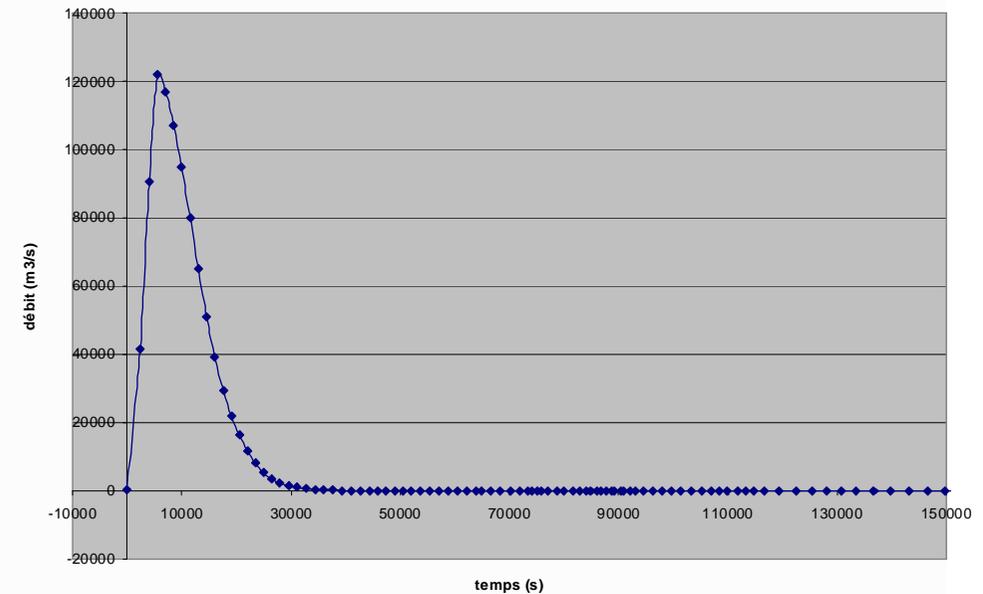
1. Les paramètres fixes : les caractéristiques du barrage
ex : longueur, hauteur, épaisseur, volume d'eau...



2. Les variables aléatoires :

- La rugosité du fond de la rivière (modélisée par dire d'expert)
- Les paramètres de l'hydrogramme de brèche (débit $Q_0(t)$) :
 - Temps de montée T_m
 - débit maximum Q_m

Hydrogramme de rupture progressive

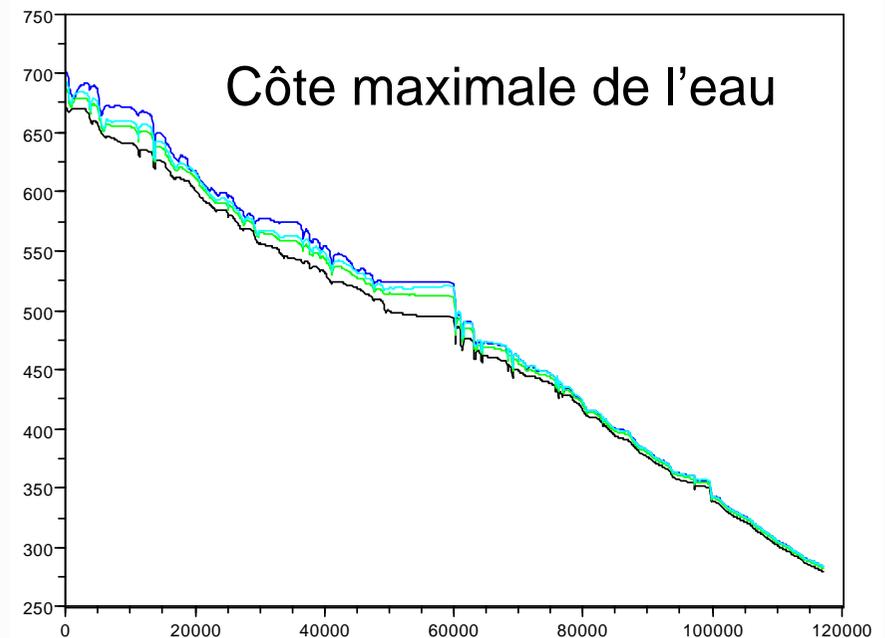
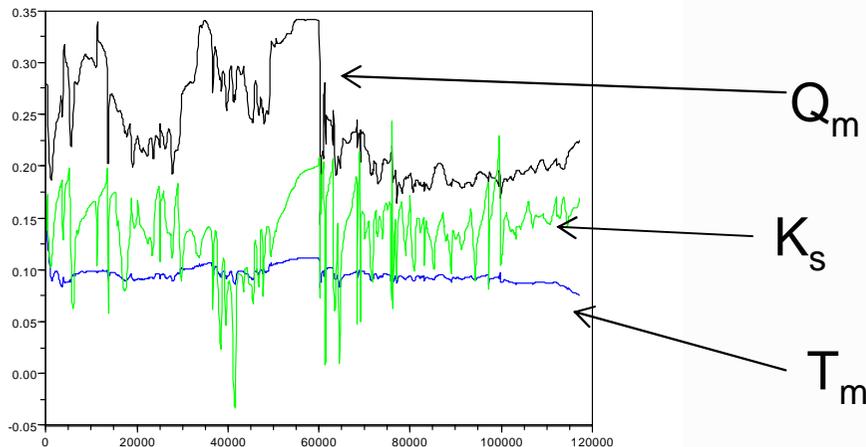
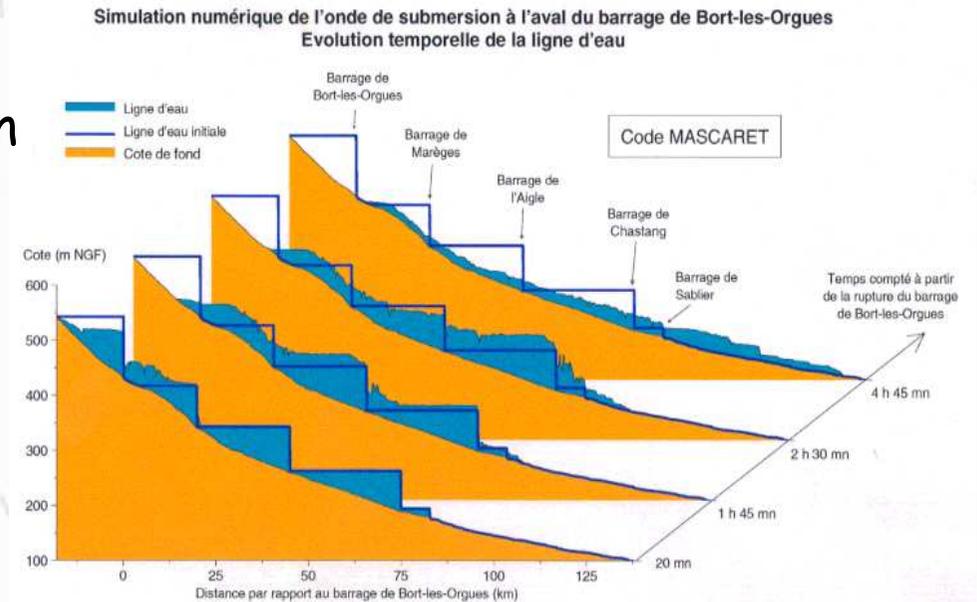


Exemple 1 : simulation de rupture d'un barrage (2/2)

Modélisation : Utilisation d'un code de calcul simulant l'hydraulique de l'inondation

Données de sortie ou résultats :

1. Calcul avec valeurs pessimistes, optimistes et de référence
2. Calculs de quantiles et de probabilités de dépassement de seuil
3. Analyse de sensibilité : influence des variables aléatoires sur l'incertitude que l'on a sur la côte maximale de l'eau



Exemple 2 : dispersion de particules dans l'atmosphère (1/3)

Scénario d'accident de rejet radioactif

Domaine d'étude : 10 km autour d'un site industriel

Deux sources arbitraires (au niveau du sol) :

- * source 1 : traceur (gaz)
- * source 2 : iode (particules)

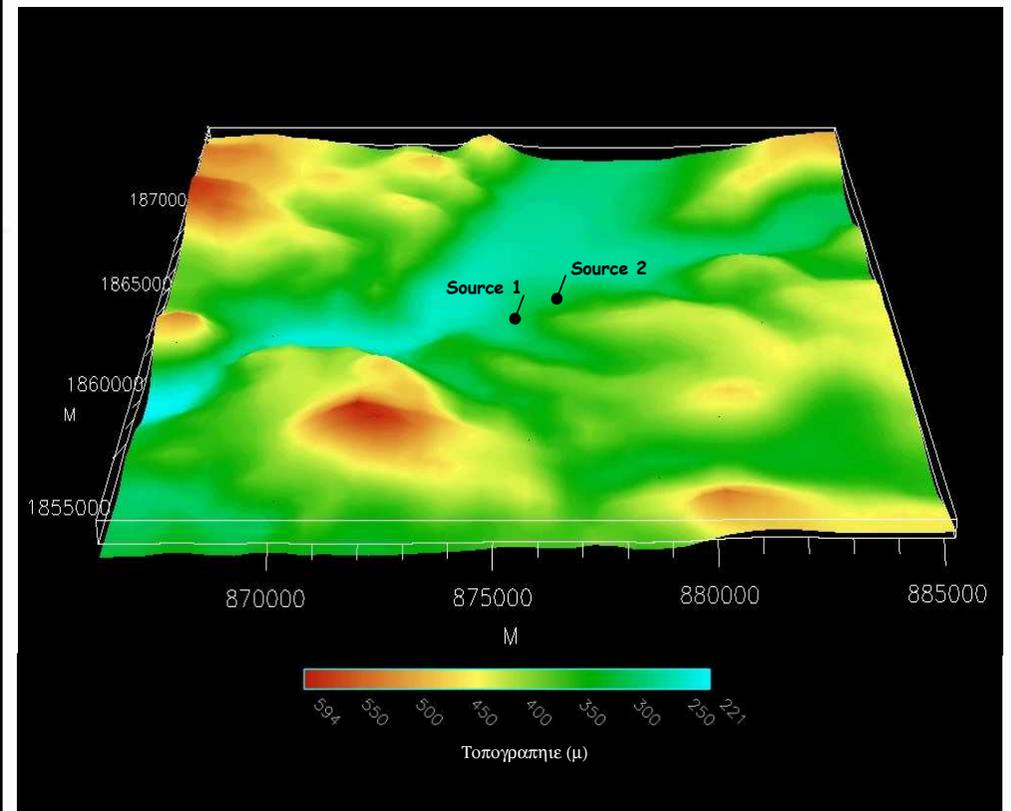
Quantités émises : 1.10^{13} Bq sur 10 heures

Calcul sur 4 jours

Données Météo : vent, température, humidité, pluie

Rugosité du sol (végétation)

Topographie et localisation des sources



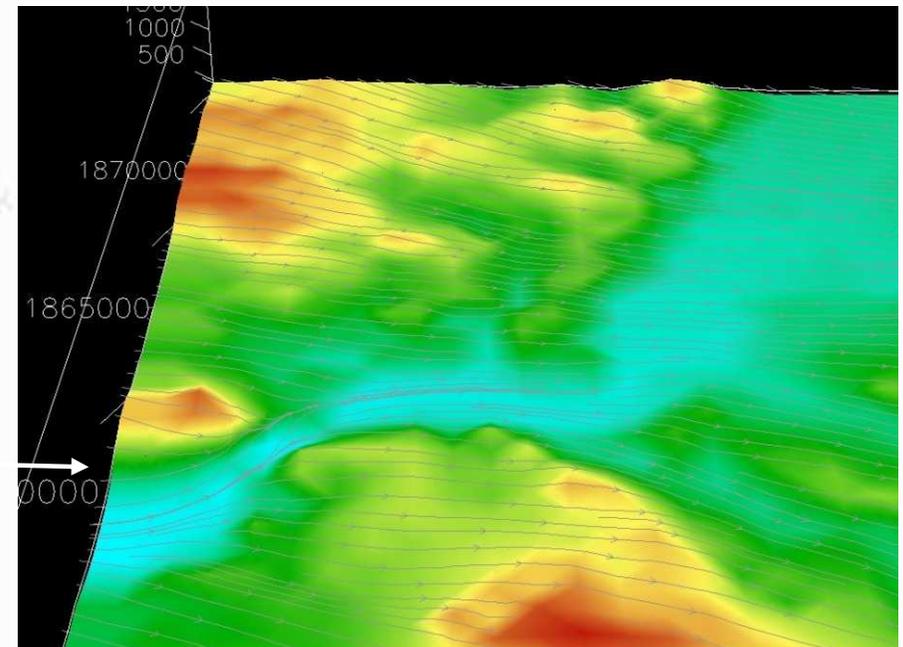
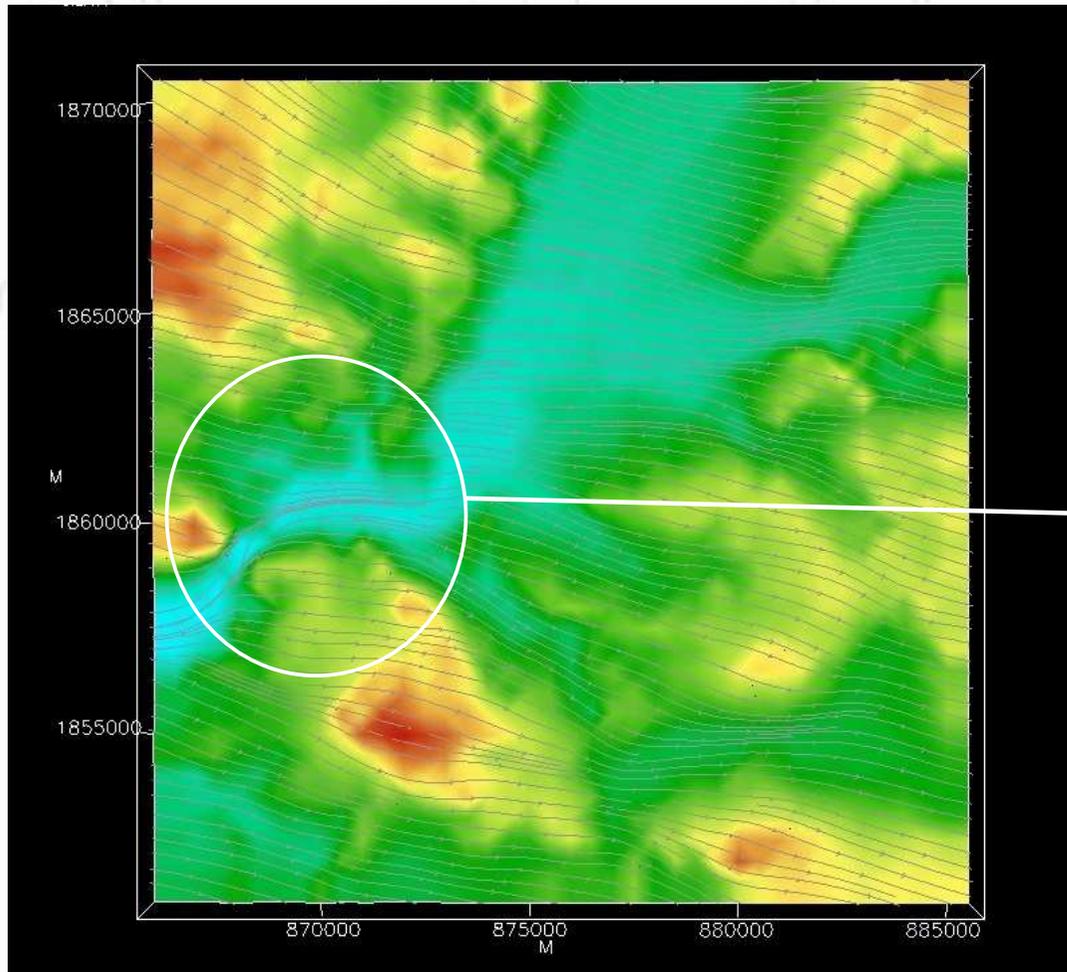
[Source : CEA]

Exemple 2 : dispersion de particules dans l'atmosphère (2/3)

Calcul des champs de vent (direction et amplitude)

Visualisation du vent sous forme de ligne de courant

Mise en évidence des circulations de vallées

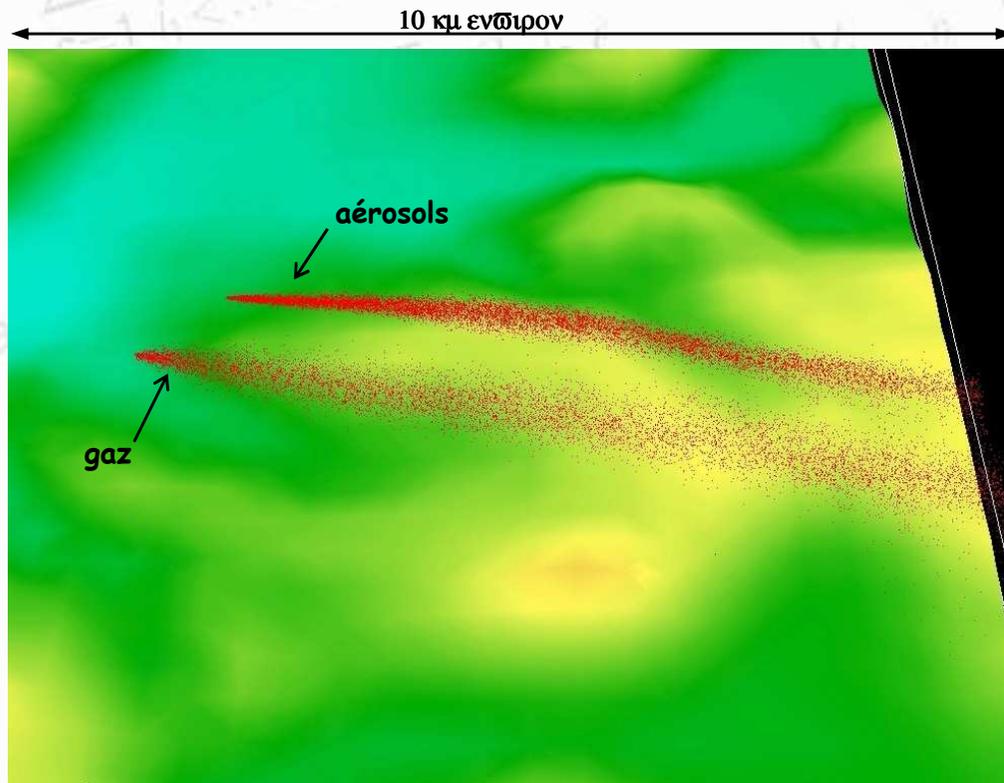


[Source : CEA]

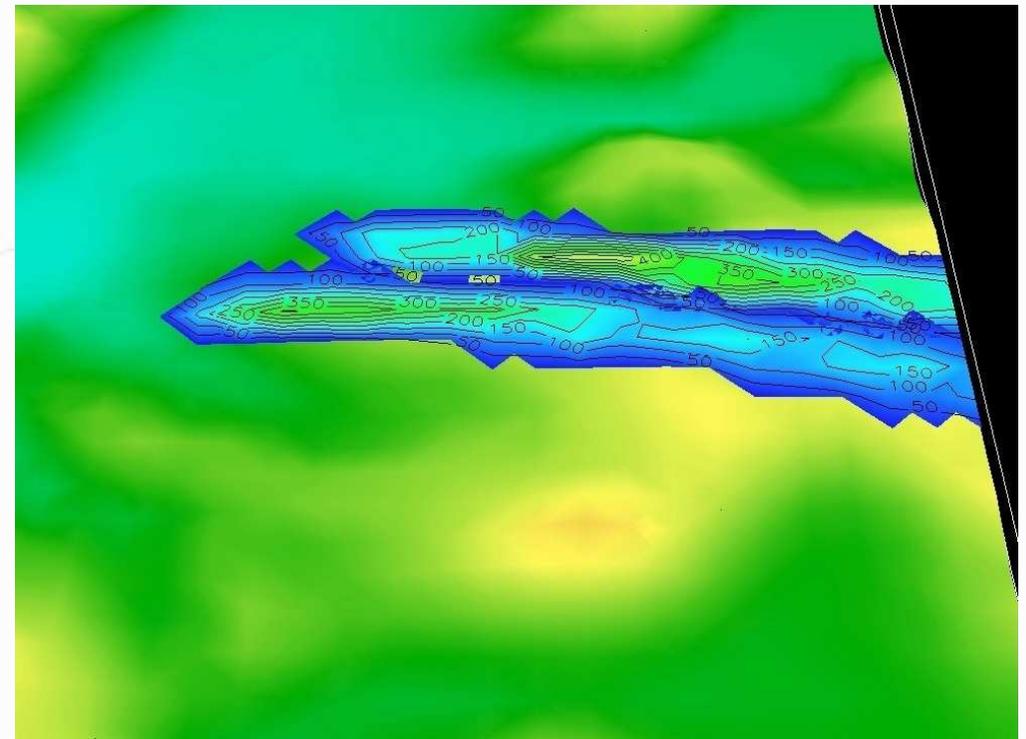
Exemple 2 : dispersion de particules dans l'atmosphère (3/3)

Utilisation d'un code de calcul de dispersion particulaire lagrangienne
(résout les «équations de la mécanique des fluides»)

Visualisation des concentrations en gaz et en aérosols après 5h de rejet



Panache sous forme particulaire

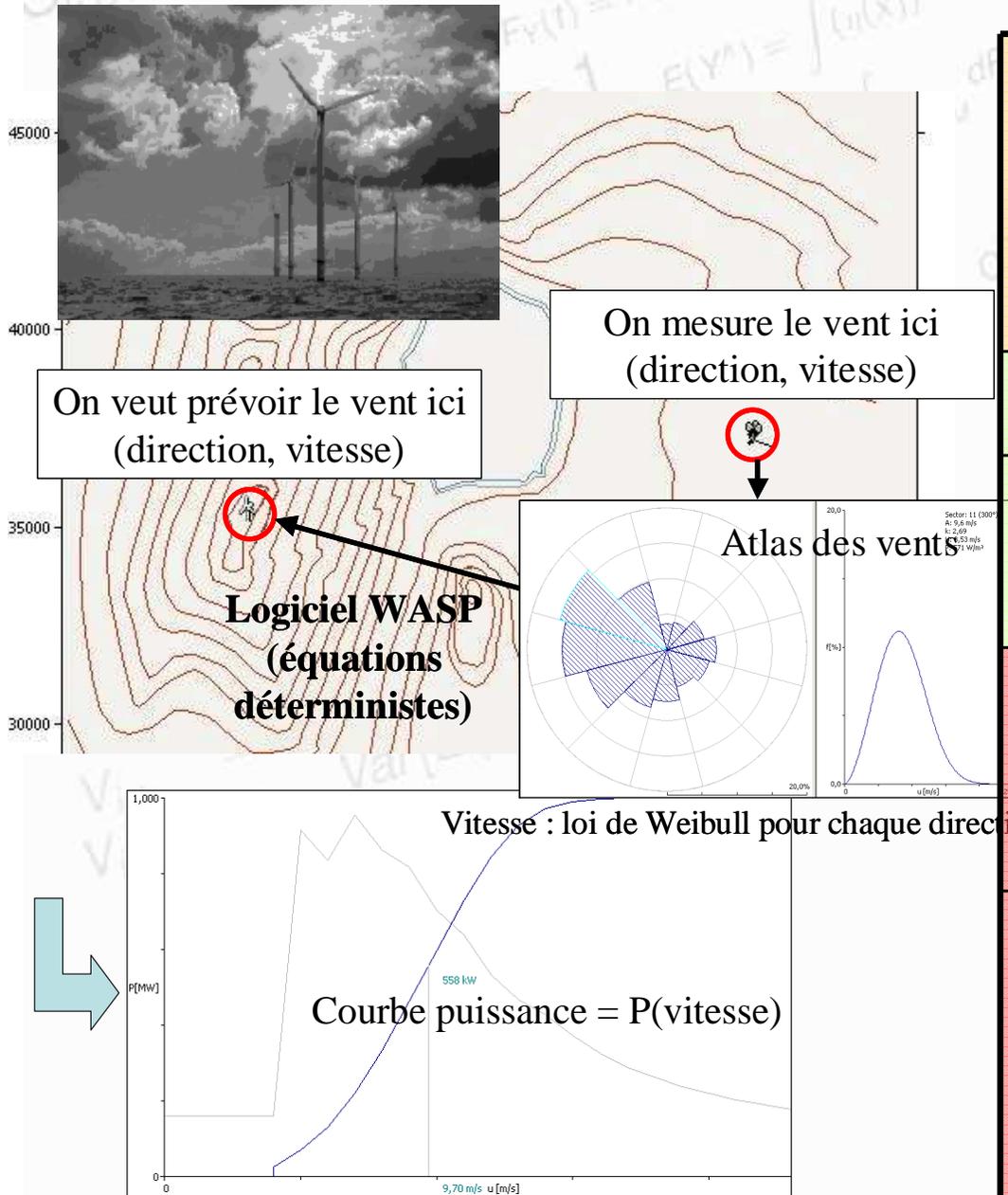


Panache de concentration (à 10 m du sol)

Les résultats sont très sensibles aux données météo

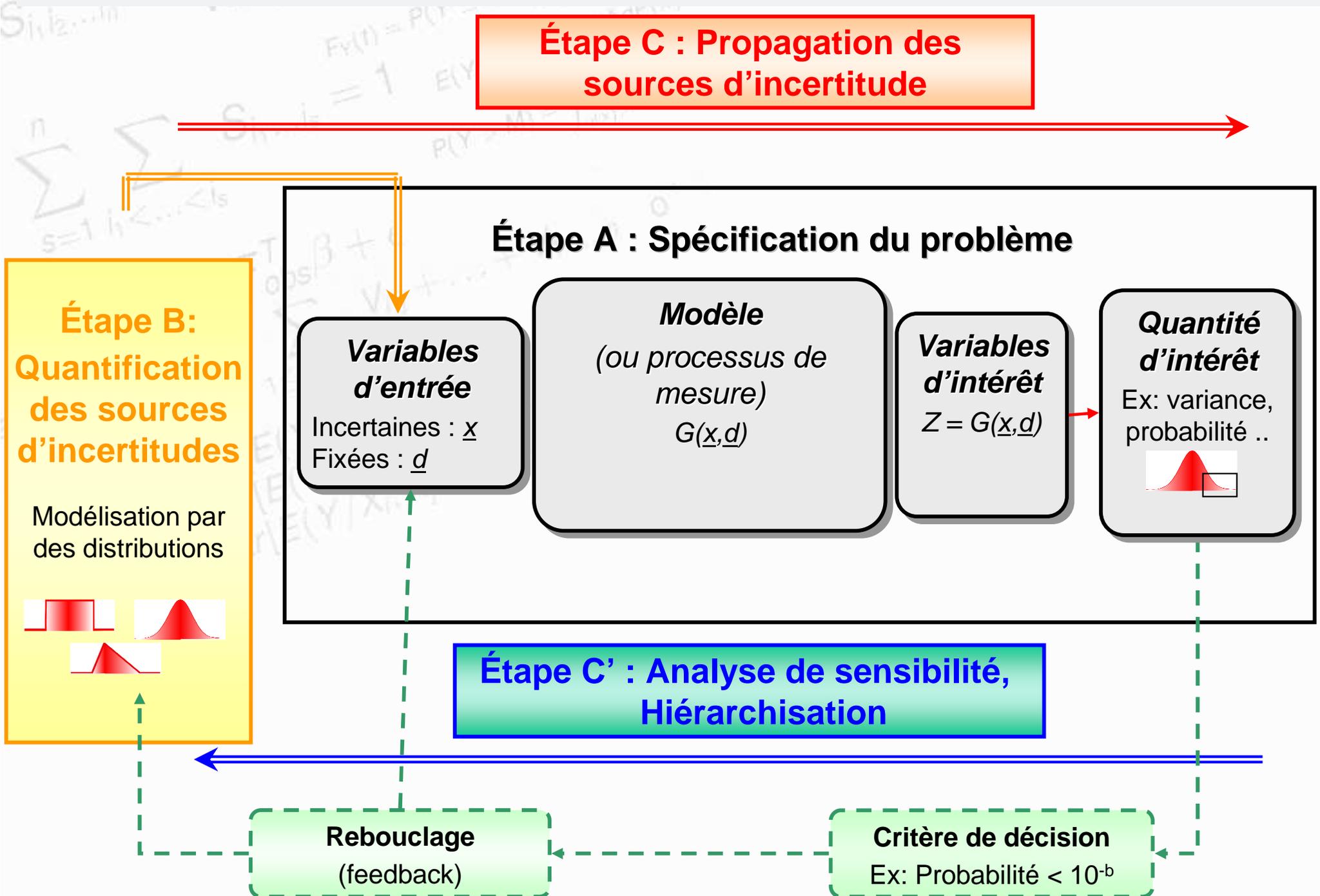
[Source : CEA]

Exemple 3 : Production Eolienne



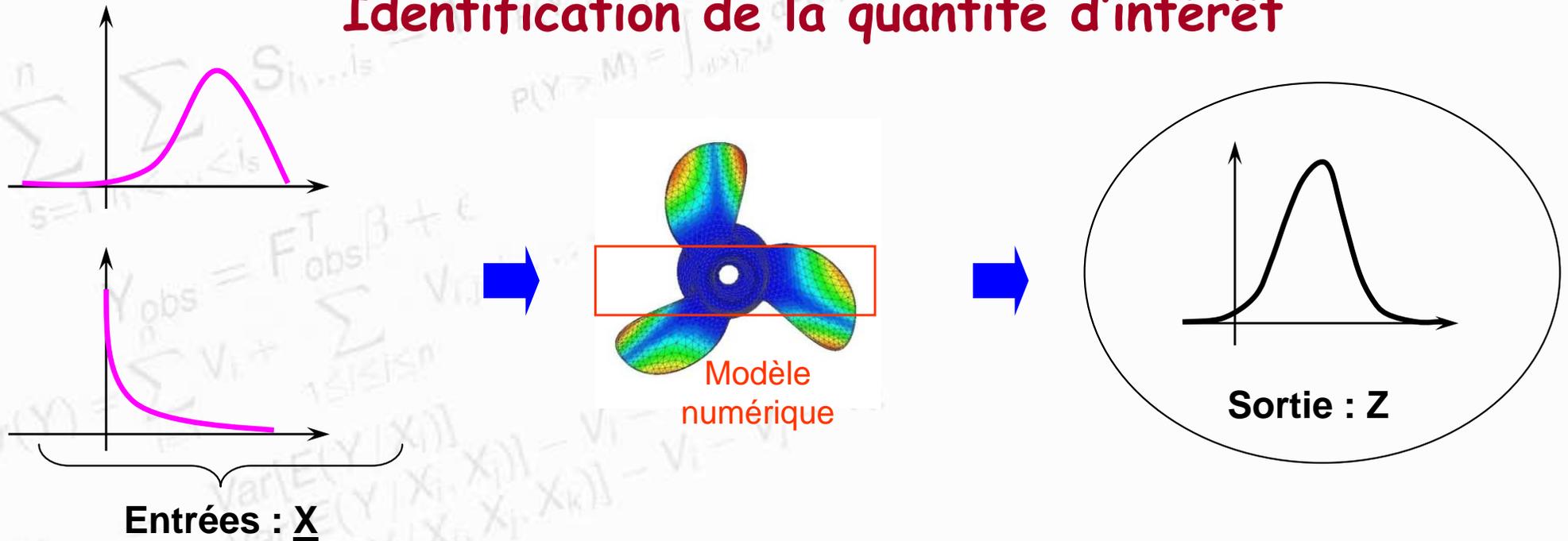
<u>Finalité</u>	<ul style="list-style-type: none"> • Comprendre le risque de mésestimation du productible • Hiérarchiser les incertitudes • Optimiser le lieu des éoliennes
<u>Critère</u>	%inc sur productible
<u>Modèle</u>	Modèle intrinsèquement statistique du vent / du productible
<u>Sources</u>	Erreurs d'estimation du vent (erreur spatiale, échantill. Temporel ...); Incertitudes de modèle
<u>Quantification</u>	<ul style="list-style-type: none"> • Estimation statistique (moments, max. vraisemblance ...)
<u>Propagation</u>	<ul style="list-style-type: none"> • Propagation par cumul quadratique simple

Approches quantitatives : schéma générique introductif

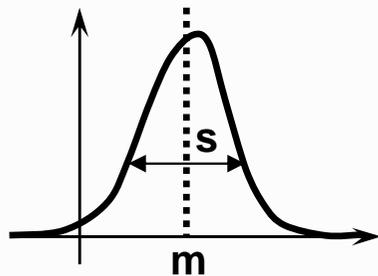


Étape A: Spécification du problème (1/2)

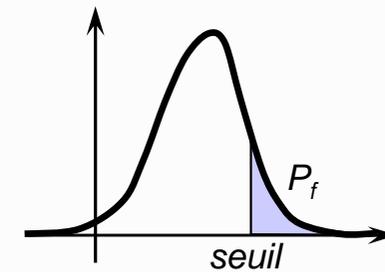
Identification de la quantité d'intérêt



Qu'est ce qui est (vraiment) intéressant pour notre étude ?



Moyenne, médiane, variance,
(moments) de Z



Quantiles (extrêmes), probabilité de
dépassement d'un seuil fixé,
distribution complète

Étape A : Spécification du problème (2/2)

Identification de la quantité d'intérêt

- La quantité d'intérêt est liée à des enjeux décisionnels
 - Du point de vue de la propagation, on distingue deux types de problèmes
- Tendances centrale (ex. moyenne) ou dispersion (variance)
 - Exemple : métrologie

Méthodes analytiques (parfois) envisageables
- Quantile extrême, « probabilité de défaillance »
 - Point de vue « exploitant » → justification d'un critère de sûreté

Méthodes numériques (optimisation, échantillonnage Monte Carlo)

Le système est dans un bon état de fonctionnement si la valeur de Z (par ex. température, hauteur d'eau) est en dessous (ou en dessus) d'un seuil de sécurité

L'évènement « défaillance » est associé au dépassement de ce seuil

Probabilité de dépassement = Probabilité de défaillance $P_f = P(Z \geq z^*)$

Étape B : Modélisation stat des sources d'incertitudes

➤ Sources d'incertitudes sont modélisées par des distributions de probabilité

\mathbf{X} est une variable aléatoire multi-dimensionnelle, décrite par une loi jointe

• Situations dans la pratique industrielle :

- Données disponibles → Ajustement de lois paramétriques ou non-paramétriques
- Données « indirectement » observées → modèles inverses
- Absence de données → Expertise pour la construction de la loi de \mathbf{X}

• Absence de données => méthodes d'élicitation

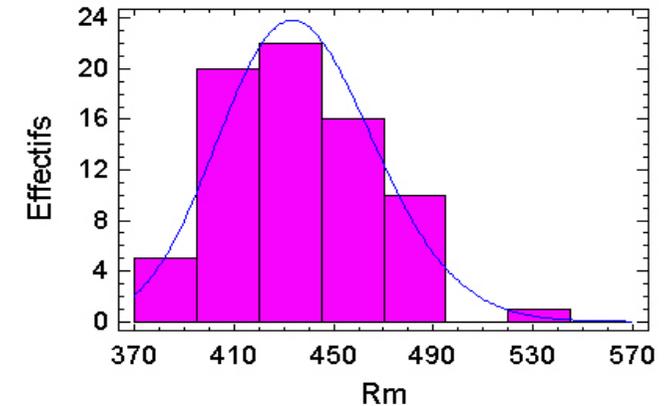
- Traduction formelle de l'avis d'expert en une distribution de probabilité
- Une manière de construire des lois de probabilité à partir d'informations « minimalistes » : **la méthode du maximum d'entropie**
- Méthodes plus rigoureuses basées sur la théorie bayésienne

Étape B : Modélisation stat des sources d'incertitudes

Ajustement empirique à une densité de probabilité

■ Forme de l'histogramme

*Exemple : essais de traction de boulons ;
limite de rupture (MPa) ;
ajustement par une loi lognormale*

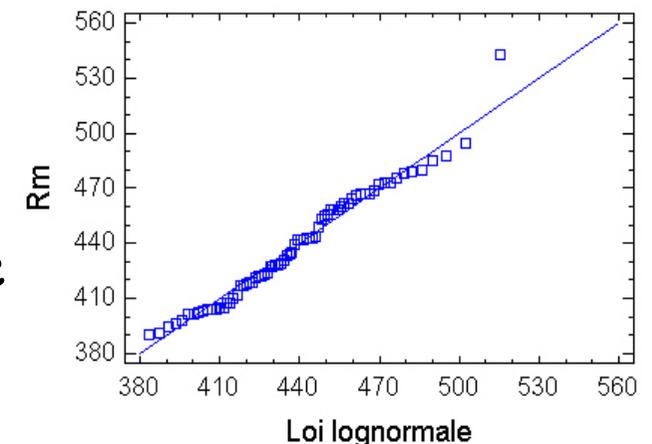


■ Comparaison sommaire des propriétés mathématiques

- ❖ Asymétrie étirée à droite (médiane=434, moyenne=437)
- ❖ Coef. d'asymétrie et d'aplatissement du log des données
- ❖ ...

■ Ajustements graphiques

- ❖ QQ-plot : Graphique quantiles-quantiles
⇒ Quantile théorique / quantile empirique



Ajustement empirique à une densité de probabilité

➤ Sans données

- ✓ Loi liée à la physique
- ✓ Par avis d'expert
- ✓ ...

➤ Avec données

- ✓ Minimum – maximum,
- ✓ Moyenne – écart-type,
- ✓ Distribution empirique – distribution théorique ajustée
- ✓ ...

**Pertinence
des données**

Qualité
des données

**Nombre de
données**

Étape B : Modélisation stat des sources d'incertitudes

Ajustement empirique à une densité de probabilité

A-t-on des données ?

NON

Avis d'expert

Étape B : Modélisation stat des sources d'incertitudes

Ajustement empirique à une densité de probabilité

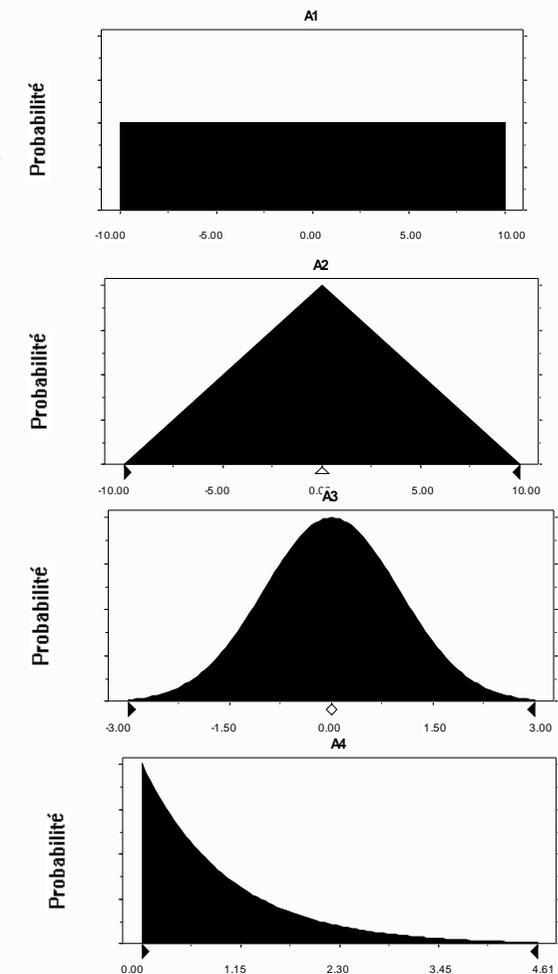
Exemples d'interprétation d'avis d'experts

Variable bornée par une valeur min et une valeur max, aucun autre a priori \Rightarrow **loi uniforme**

Variable bornée par une valeur min et une valeur max, une valeur plus probable que les autres \Rightarrow **loi triangulaire**

On connaît uniquement la moyenne et l'écart-type \Rightarrow **loi normale**

Variable positive, on connaît uniquement la moyenne \Rightarrow **loi exponentielle**



Étape B : Modélisation stat des sources d'incertitudes

Ajustement empirique à une densité de probabilité

A-t-on des données ?

NON

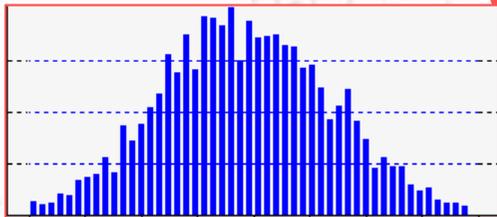
OUI

Avis d'expert

A-t-on une idée de la loi ?

NON

Histogrammes
(et noyaux)



Étape B : Modélisation stat des sources d'incertitudes

Ajustement empirique à une densité de probabilité Histogrammes et méthode des noyaux

La représentation par histogrammes dépend des classes ...

... on peut également représenter la densité à l'aide de noyaux

⇒ méthode non paramétrique

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

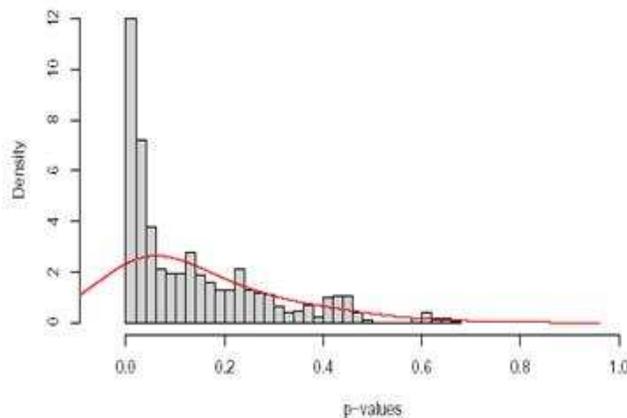
Principe : "lissage" de l'histogramme

- N : taille de l'échantillon
- h : largeur de la fenêtre ⇔ paramètre de lissage
- K : noyau (kernel) ⇒ gaussien, uniforme, ..

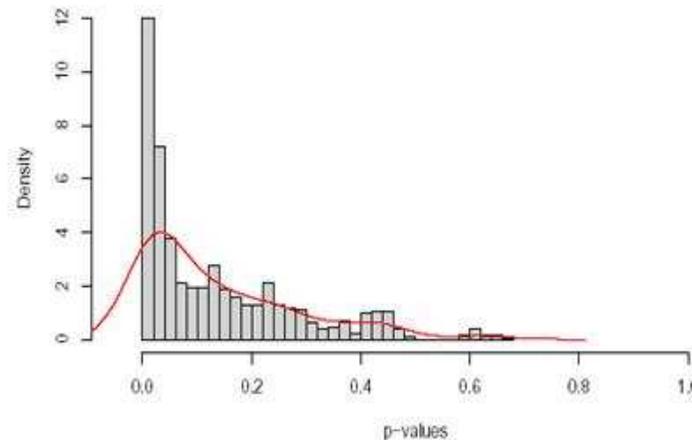
$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

Stefania Scheid - Introduction to Kernel Smoothing

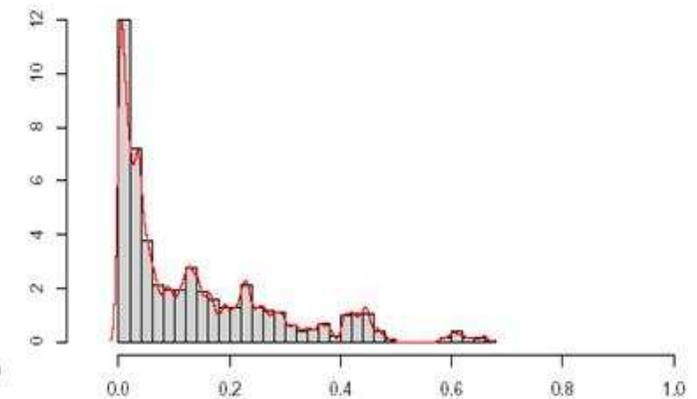
KDE avec h=0.1



KDE avec h=0.05



KDE avec h=0.005



IND : la méthode fonctionne également en multi-dimensionnel

Étape B : Modélisation stat des sources d'incertitudes

Ajustement empirique à une densité de probabilité

Quelques considérations sur le support des lois

Positive
Continue $(0, +\infty)$

Illimité
Continue $(-\infty, +\infty)$

Limité
Continue (a, b)

Exponentielle
Gamma/Erlang
Log normal
Weibull
Chi-deux
F (Fisher-
Snedecor)
Log-Laplace
Log-logistique
Pareto

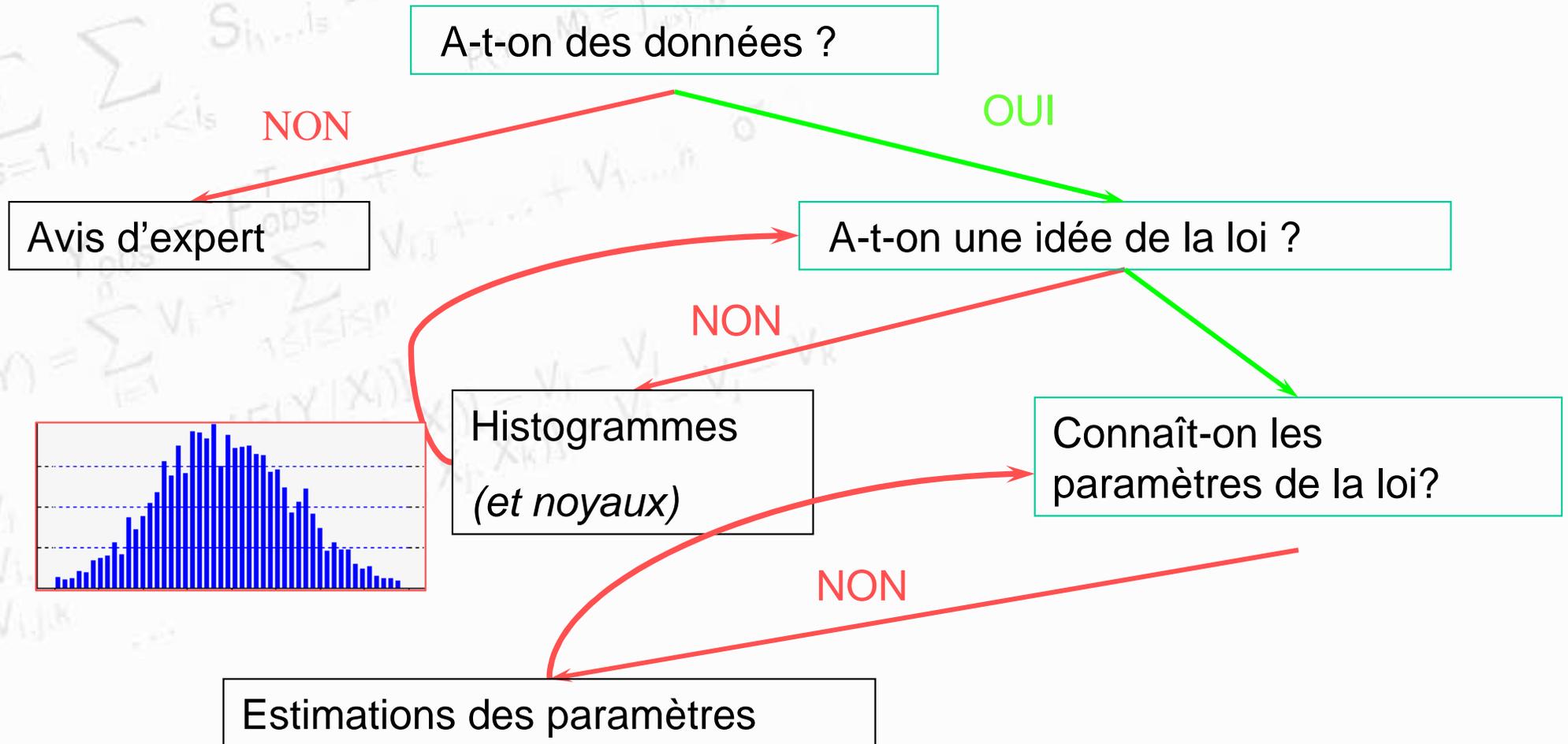
Normale
Cauchy
Loi des Extrêmes A,B
Laplace
Logistique
Student
...

Bêta
Triangulaire
Uniforme
...

...

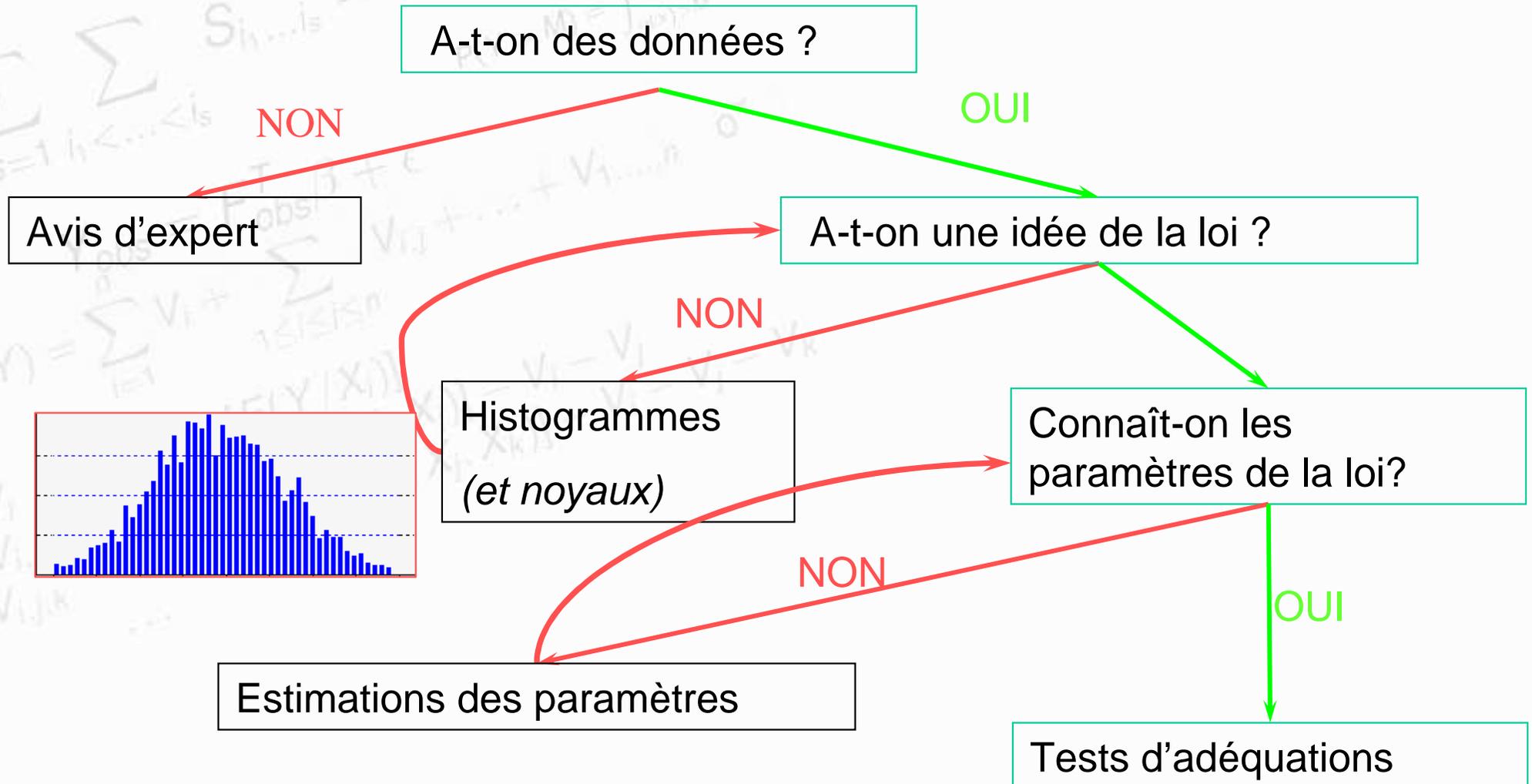
Étape B : Modélisation stat des sources d'incertitudes

Ajustement empirique à une densité de probabilité



Étape B : Modélisation stat des sources d'incertitudes

Ajustement empirique à une densité de probabilité



Étape B : Modélisation stat des sources d'incertitudes

Adéquation : vérification graphique

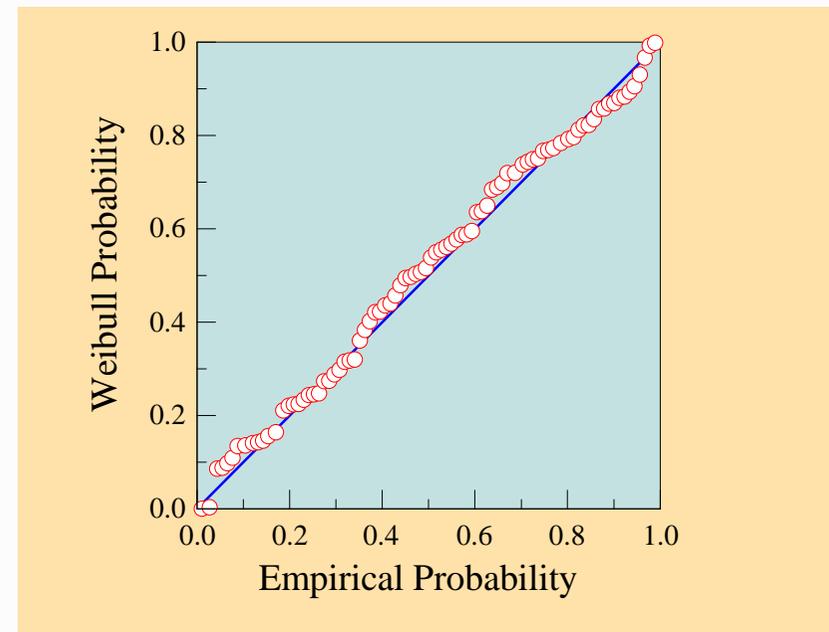
- Comparaison des densités de probabilités théoriques et empiriques (empirique = histogramme)
- **P-P plot** : graphe des probabilités pour comparer les fonctions de répartition empiriques et théoriques

$$\text{Théorique} : F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$\text{Empirique} : F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{\{X_k \leq x\}} = \frac{\text{nb de données} \leq x}{\text{nb de données}}$$

Coordonnées d'un point

sur le P-P plot : $\left(\frac{k}{n}; F(x_{(k)}) \right)$



- **Q-Q plot** : graphe des quantiles empiriques et théoriques

Test d'adéquation

Étape 1 : Définition de deux hypothèses H_0 contre H_1

H_0 : « les données suivent une loi donnée de fonction de répartition F »

H_1 : « les données ne suivent pas cette loi »

Étape 2 : Définition de la statistique de test

Étape 3 : Définition d'un niveau de confiance α et du risque de 1^{ère} espèce

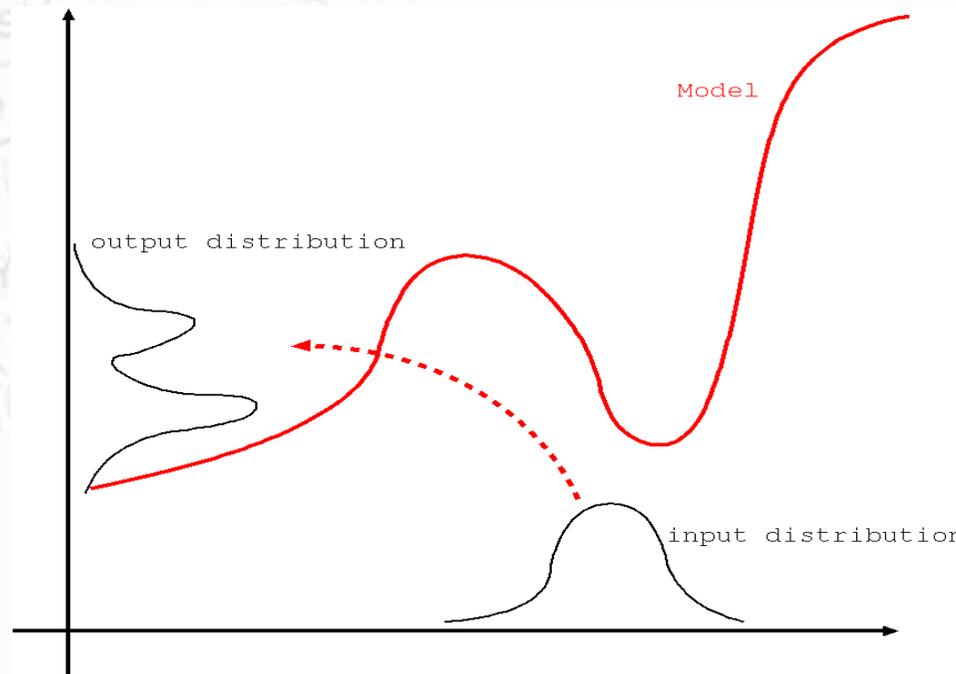
Étape 4 : Définition de la règle de décision

Tests usuels :

- Test de Kolmogorov Smirnov
- Test d'Anderson-Darling
- Test de Cramer Von Mises

Étape C : Propagation d'incertitudes

- Transfert des incertitudes de $\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^d$ vers $Z \in \mathfrak{R}$, via la fonction déterministe $G(\bullet)$
- \mathbf{X} (noté aussi \underline{X} ou X) est un vecteur aléatoire, avec une certaine mesure de proba
- $Z = G(\mathbf{X})$ devient un vecteur aléatoire, avec une mesure de proba à déterminer



- Problème conceptuellement « simple » mais (parfois) de mise en œuvre complexe
- Choix de la méthode dépend très fortement de la « quantité d'intérêt » de l'étude
- ...d'où l'importance de l'étape A, peu mathématique mais essentielle en pratique

Étape C : Propagation d'incertitudes

- **Enjeu** : Arbitrer entre précision de l'estimateur et coût des calculs
- Si possible, **Monte Carlo** est à privilégier : indépendant de la dimension des entrées, estimation non biaisée, fournit un intervalle de confiance sur l'estimation
 - Mais : coût important en nombre d'évaluations du modèle
- Si le code de calcul est trop coûteux en CPU, il existe des méthodes alternatives :
 - Méthodes quasi-Monte Carlo - Mais : fléau de la dimension
 - Méthodes approchées :
 - Cumul quadratique (développement de Taylor) - Mais : hypothèse linéaires
 - Méthodes FORM/SORM : estimation rapide de P_f . Cette première estimation peut être utilisée pour construire un tirage d'importance
 - **Utilisation d'un modèle de substitution du code de calcul ayant un coût pratiquement nul (métamodèle)**
 - Attention : un nouveau terme d'erreur apparaît
 - Le calage du métamodèle demande aussi un certain nombre d'appels au vrai modèle

Étape C' : Analyse de sensibilité

Objectifs

- Réduction de l'incertitude de la sortie par hiérarchisation des sources
 - Variables à fixer pour obtenir la plus forte réduction (ou une réduction donnée) de l'incertitude de la sortie
 - Variables les plus influentes dans un domaine de valeurs de la sortie
 - ⇒ si réductibles, priorité de R&D
- Simplifier un modèle
 - détermination des variables non influentes, que l'on pourra fixer
 - construire un modèle simplifié, un métamodèle

Étape C' : Analyse de sensibilité

Analyse de sensibilité locale et globale

- **sensibilité**, par exemple $\partial G / \partial X_i$

basée sur le développement de Taylor à l'ordre 1 autour d'un \mathbf{X}^0
nominal :

$$G(\mathbf{X}) = G(\mathbf{X}^0) + \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial G}{\partial X_i} \right)_{\mathbf{X}^0} (X_i - X_i^0)$$

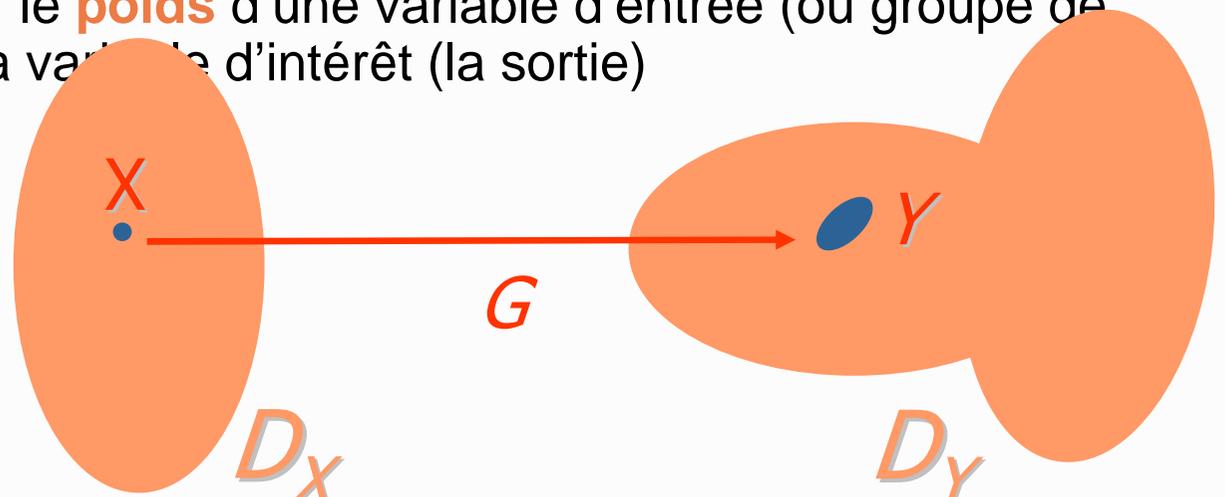
Effet de la réponse en fonction de **variations potentielles** des facteurs

- « **contribution** » = **sensibilité x importance**,

par exemple $\frac{\partial G}{\partial X_i} \sigma(X_i)$, mesure valide sous **hypothèse de linéarité** entre Y et \mathbf{X}

Permet de déterminer le **poids** d'une variable d'entrée (ou groupe de variables) sur l'incertitude de la variable d'intérêt (la sortie)

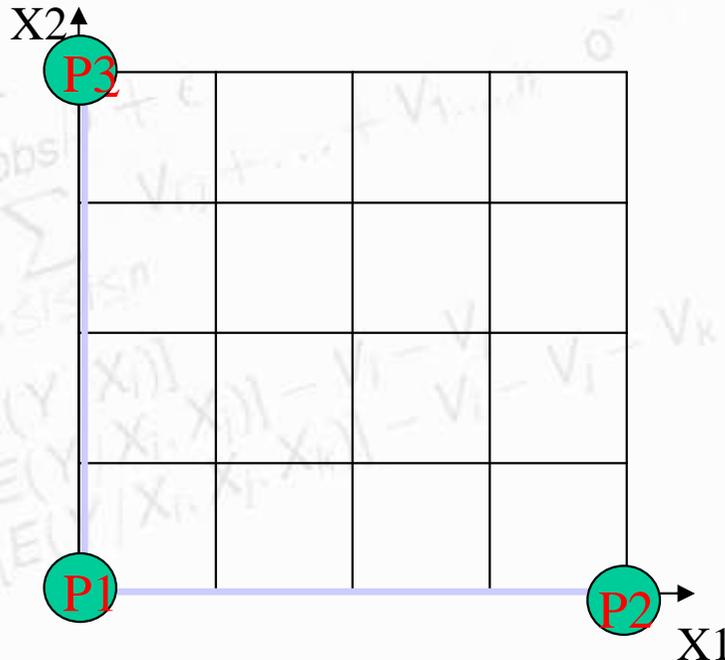
**Distinction
local vs. global**



Étape C' : Analyse de sensibilité

Analyse de sensibilité par plan One-At-a-Time

Part de l'idée très répandue que pour analyser les causes d'un phénomène, il faut faire des expériences en **ne bougeant qu'un seul facteur à la fois**



Pratique courante en expérimentation

On voit aisément que : OAT apporte des informations, potentiellement fausses

L'exploration est pauvre :

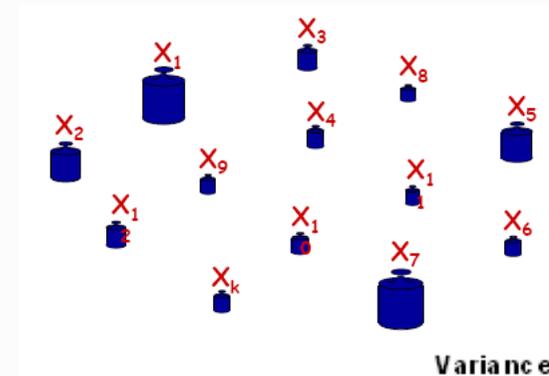
- ne détecte pas les non monotonies, discontinuités, interactions
- laisse de grandes zones inexplorées dans l'espace des paramètres d'entrée (fléau de la dimension)

Étape C' : Analyse de sensibilité

Les outils mathématiques de l'analyse de sensibilité globale

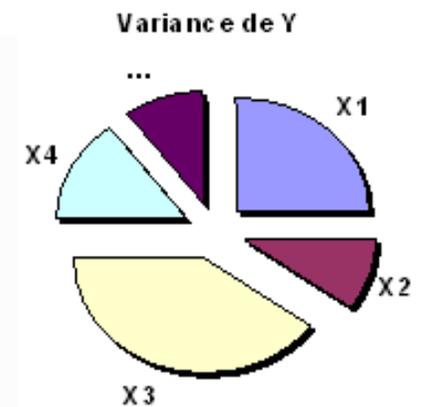
Le criblage (screening) :

- plans d'expériences classiques,
- plans d'expériences numériques,
- outils graphiques



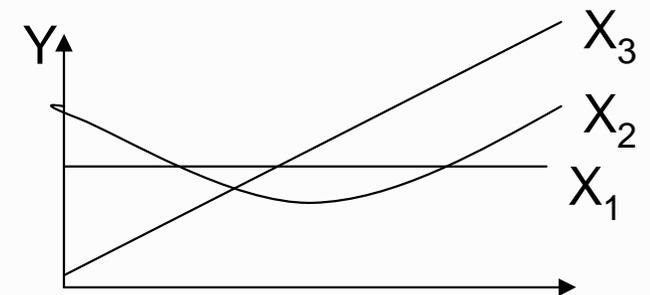
Les mesures d'influence globale :

- corrélation/régression sur les valeurs/rangs,
- décomposition de la variance fonctionnelle (Sobol)



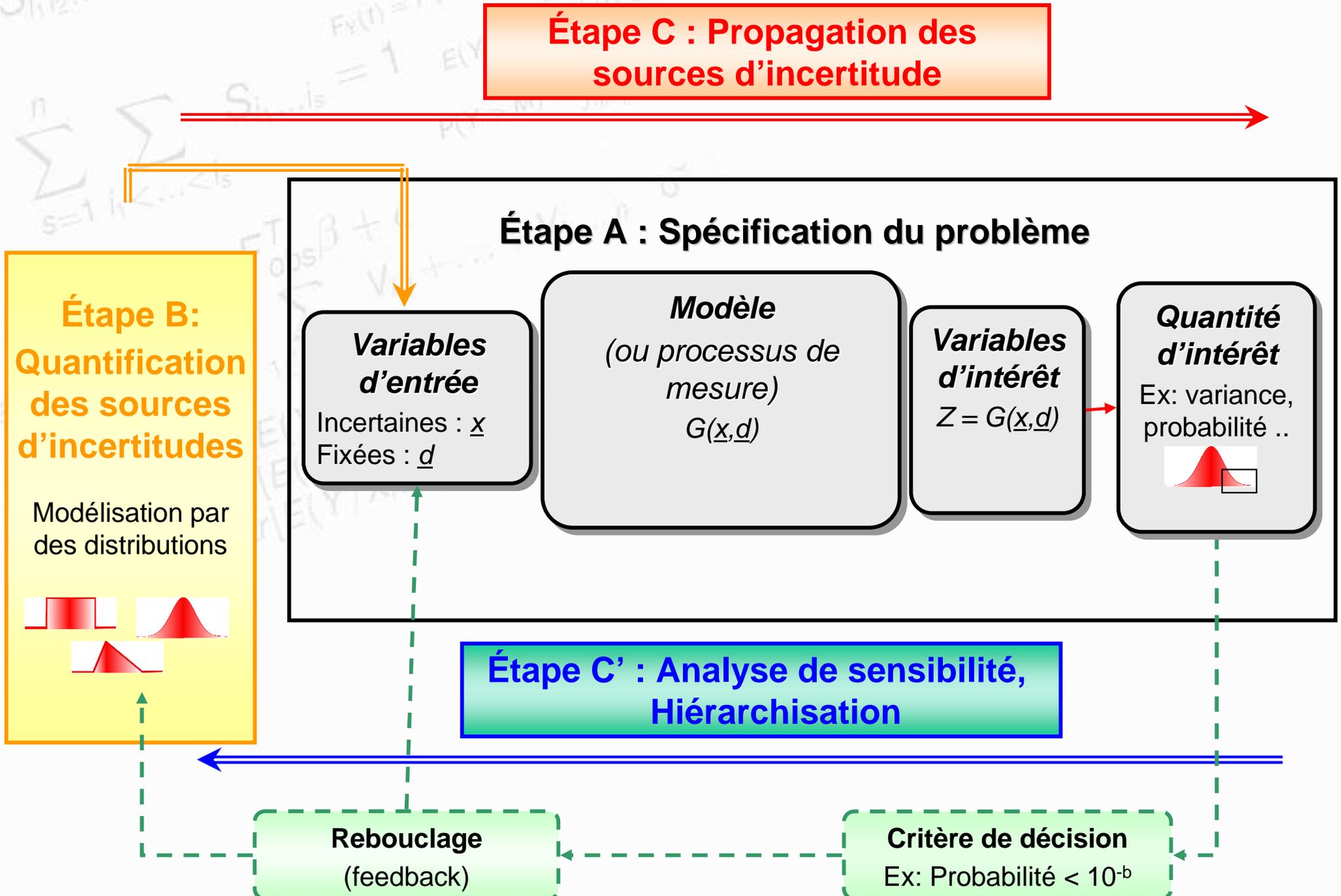
Exploration fine des sensibilités :

- méthodes de lissage (param./non param.),
- métamodèles (surface de réponse, modèle mathématique simplifié, etc.)



Toutes ces méthodes visent à « explorer » le comportement du modèle et sont basées sur un échantillonnage (que l'on souhaiterait judicieux) du domaine des entrées

Approches quantitatives : schéma générique introductif



Utilisation d'un métamodèle

➤ Problème :

- Code souvent complexe & « coûteux »
- Grand nombre de variables d'entrée
- Grand nombre de simulations nécessaires pour réaliser les études de sensibilité et de propagation d'incertitude
- Etude souvent « multi-objectif »



Exploitation directe du code difficile



Utilisation d'un métamodèle

Utilisation d'un métamodèle

➤ Métamodèle :

- Fonction statistique représentative du code de calcul
- Construction à partir de n simulations du code
- Temps d'évaluation négligeable par rapport à celui du code
- Approximant les réponses du code
- Permettant de prédire avec une « bonne précision » de nouvelles réponses dans le domaine de variation des paramètres incertains

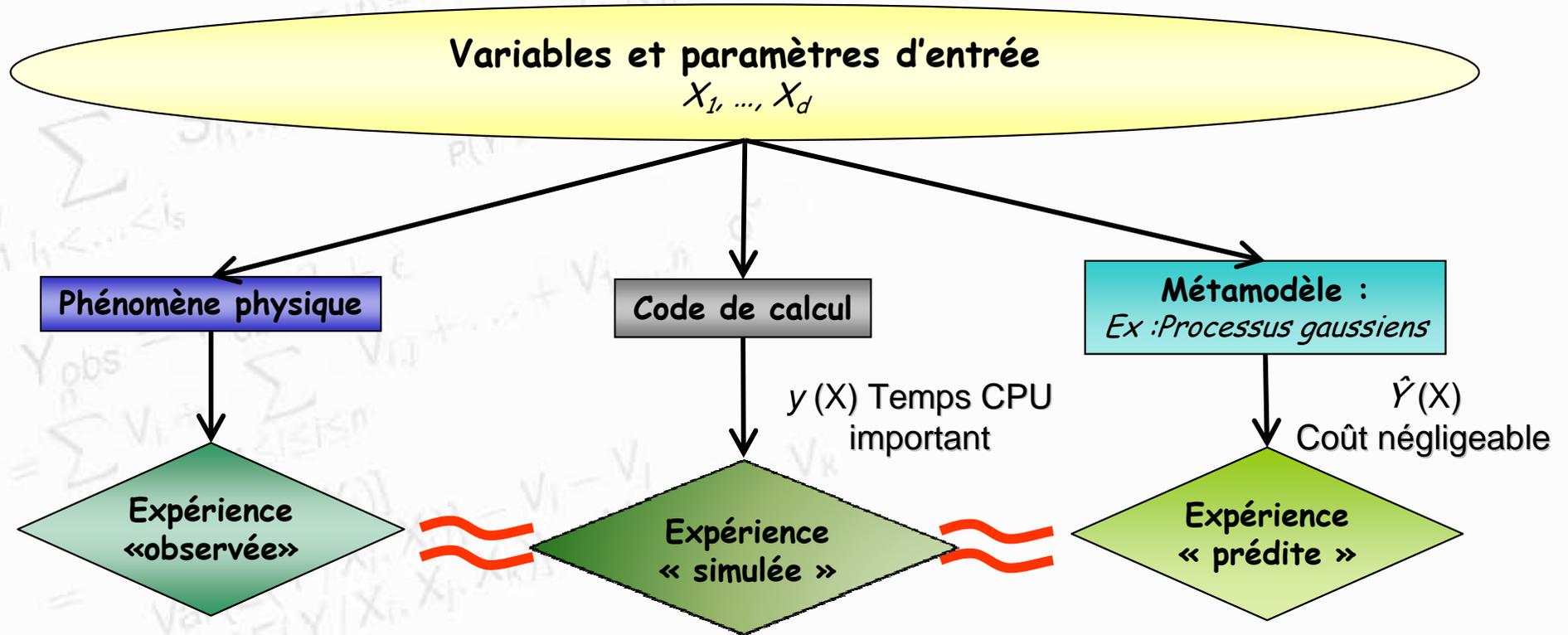


Contrôle de la qualité d'approximation et de prédiction

- Outil multifonctionnel : analyse de sensibilité, propagation d'incertitudes, calibration...

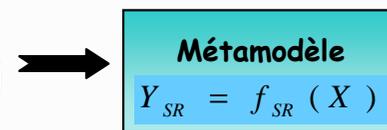
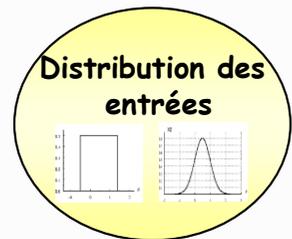
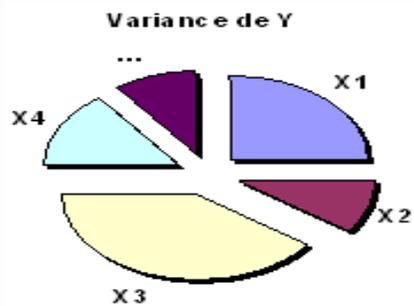
Autres appellations : *surface de réponse , émulateur, surrogate model, modèle simplifié,...*

Utilisation d'un métamodèle



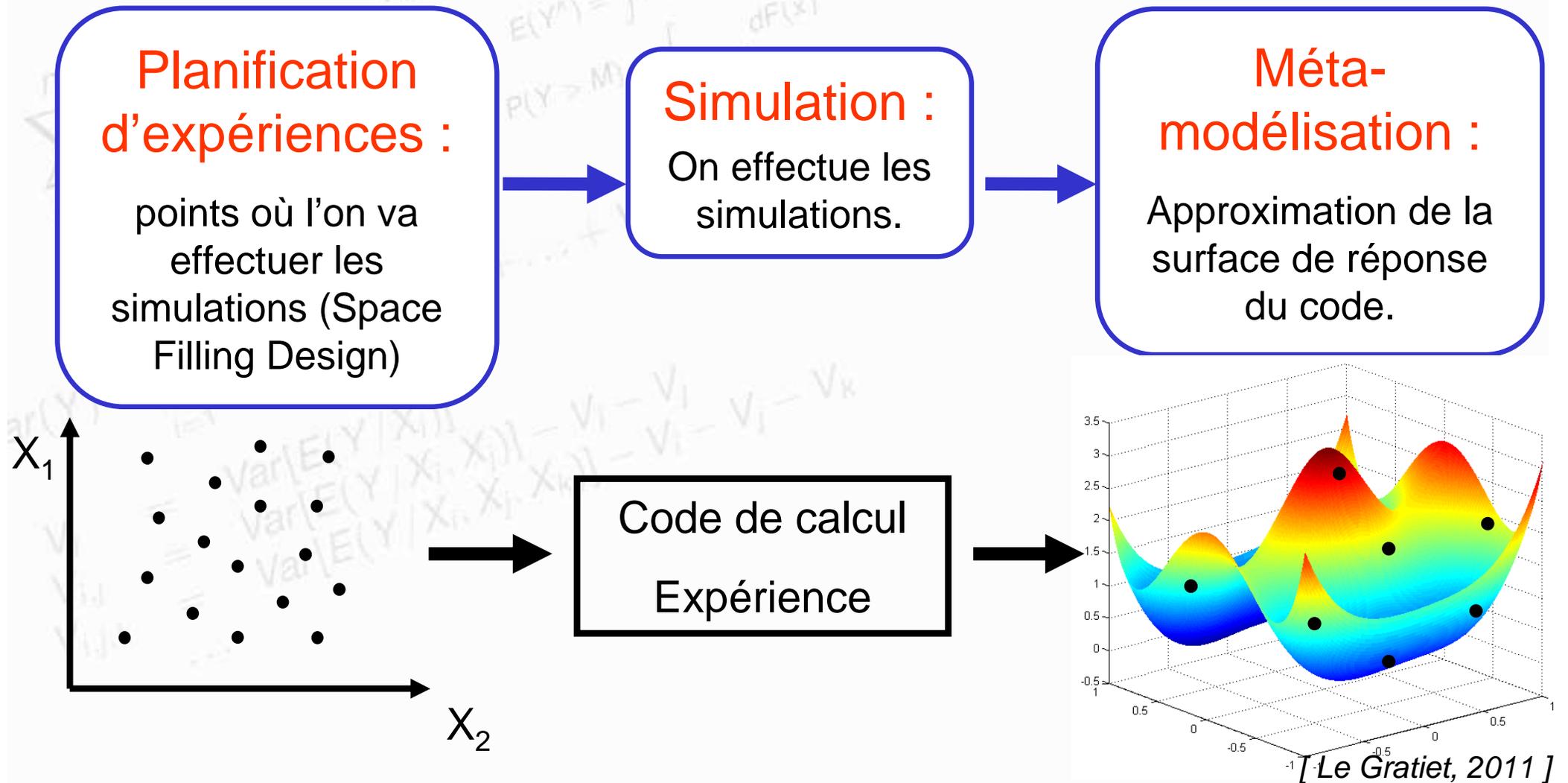
➤ Exploitation du métamodèle

- Analyse de sensibilité
- Propagation d'incertitudes
- Calibration



Détermination des paramètres
↓
Adéquation expériences simulées et observées

Utilisation d'un métamodèle



- On doit choisir parmi une **famille de fonctions**, la fonction métamodèle
- Exemples : polynômes, krigeage, réseaux de neurones, polynômes de chaos, ...

Planification d'expériences

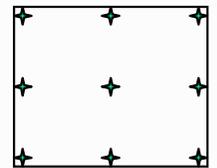
Objectif : Placer des points dans le domaine des entrées $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ dans le but d'explorer « au mieux » l'espace des possibles sur la sortie du modèle $G(\mathbf{X})$

Contrairement à l'étape de propagation d'incertitudes, cela dépend de p

Maille régulière avec n niveaux $\rightarrow N = n^p$ simulations

Ex: $p = 2, n = 3$
 $\rightarrow N = 9$

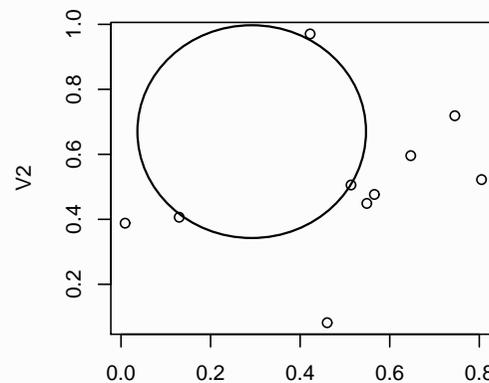
$p = 10, n = 3$
 $\rightarrow N = 59049$



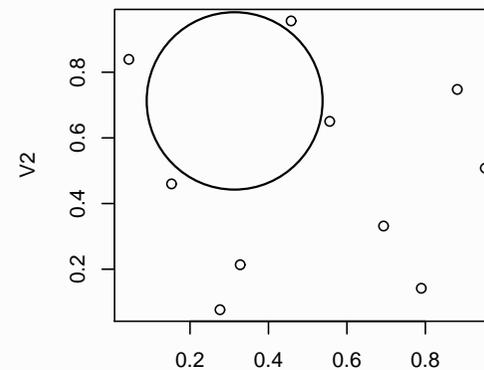
Pour minimiser N , on a besoin d'assurer une bonne couverture de l'espace

L'échantillonnage Monte Carlo n'assure pas ça

Ex: $p = 2$
 $N = 10$



Monte Carlo



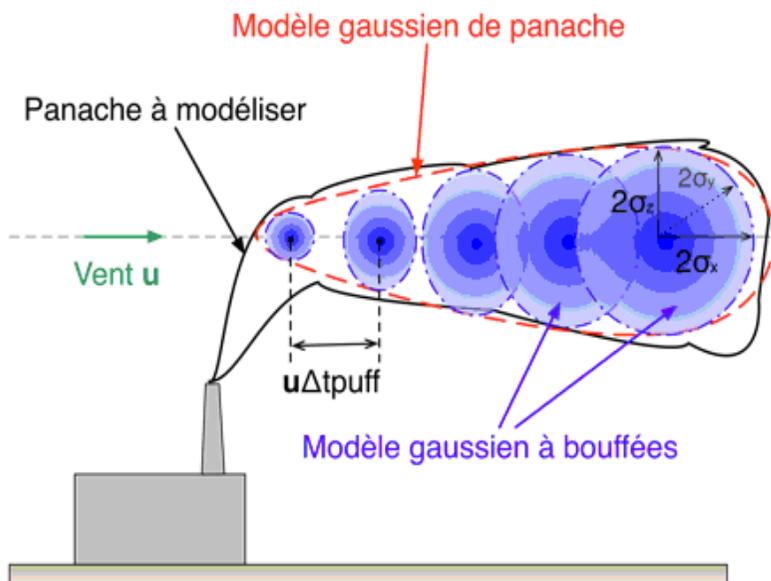
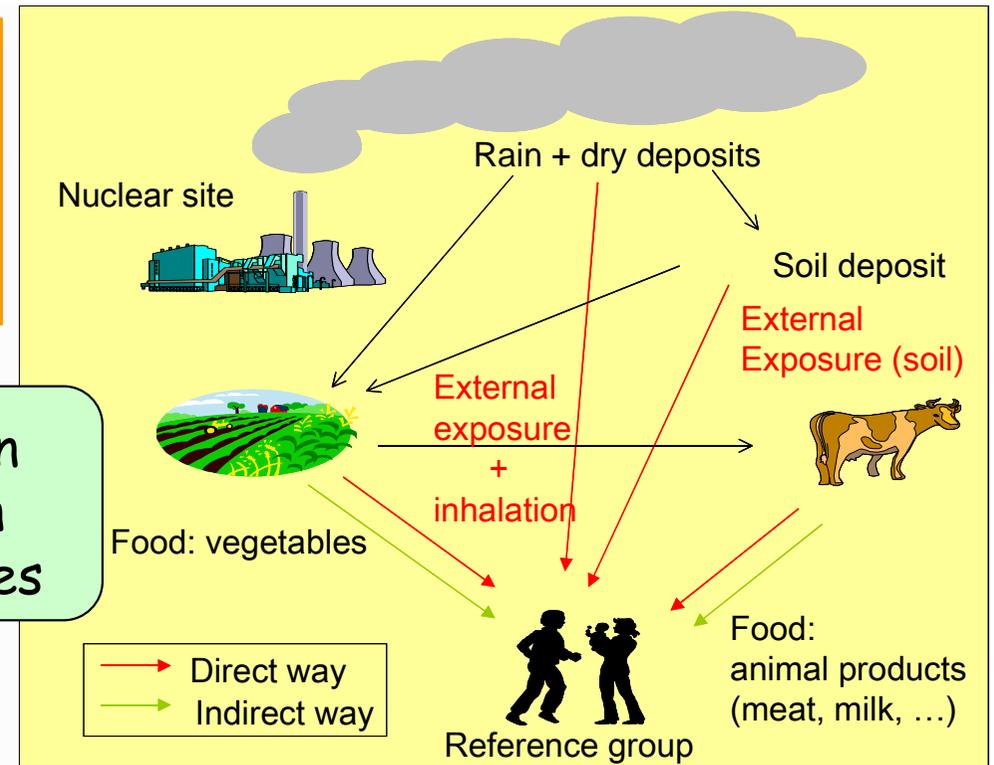
Plan optimisé

Illustration sur un cas industriel

Modèle de dispersion atmosphérique de radionucléides

Evaluation des dépôts causés par le rejet accidentel ou chronique de polluants nucléaires (rejets atmosphériques)

Modélisation de la dispersion atmosphérique basée sur un modèle à bouffées gaussiennes



Code de dispersion atmosphérique CERES-MITHRA (C-M)
⇒ Calcul d'impact des installations nucléaires

Illustration sur un cas industriel

Modèle de dispersion atmosphérique de radionucléides

Entrées C-M

Chronique de rejets

- Points de rejet
- Hauteur des points de rejet
- Quantité de radionucléides rejetés
- Vitesse de dépôt des radionucléides
- Durée des rejets

Chronique météorologiques

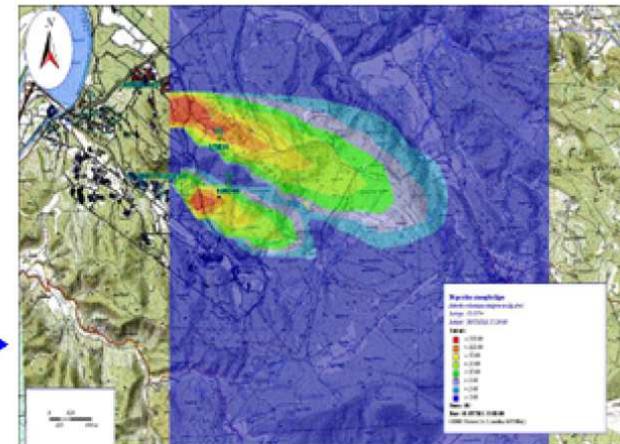
- Direction du vent
- Vitesse du vent
- Diffusion atmosphérique
- Température
- Taux d'humidité
- Durée d'observation
(≥ Durée du rejet)

Simulateur
C-M

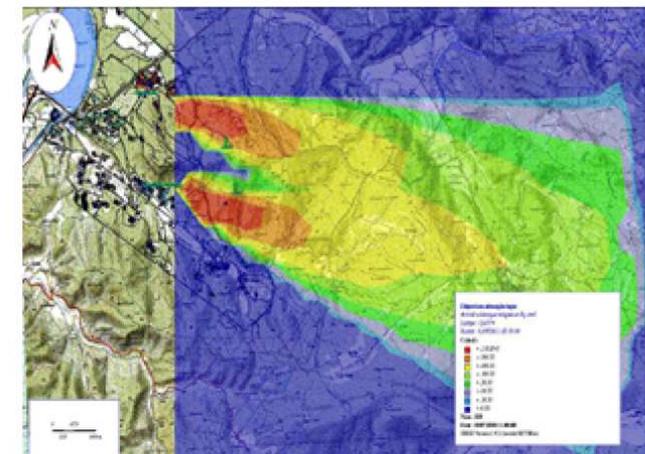
Temps CPU de quelques
secondes à quelques
dizaines de minutes

Sorties C-M

Cartes 2-D de la concentration de l'activité volumique intégrée ($Bqsm^{-3}$)
à différents instants



Concentration de Cs137 après 20 minutes



Concentration de Cs137 après 2 heures

Illustration sur un cas industriel

Etude du modèle de dispersion atmosphérique de radionucléides

Objectifs

- Quantifier les incertitudes sur les paramètres d'entrée du modèle
- Evaluer l'influence de chaque paramètre d'entrée sur la sortie
=> **analyse de sensibilité du code C-M**
- Identifier l'impact sur les prédictions du modèle C-M

Problème

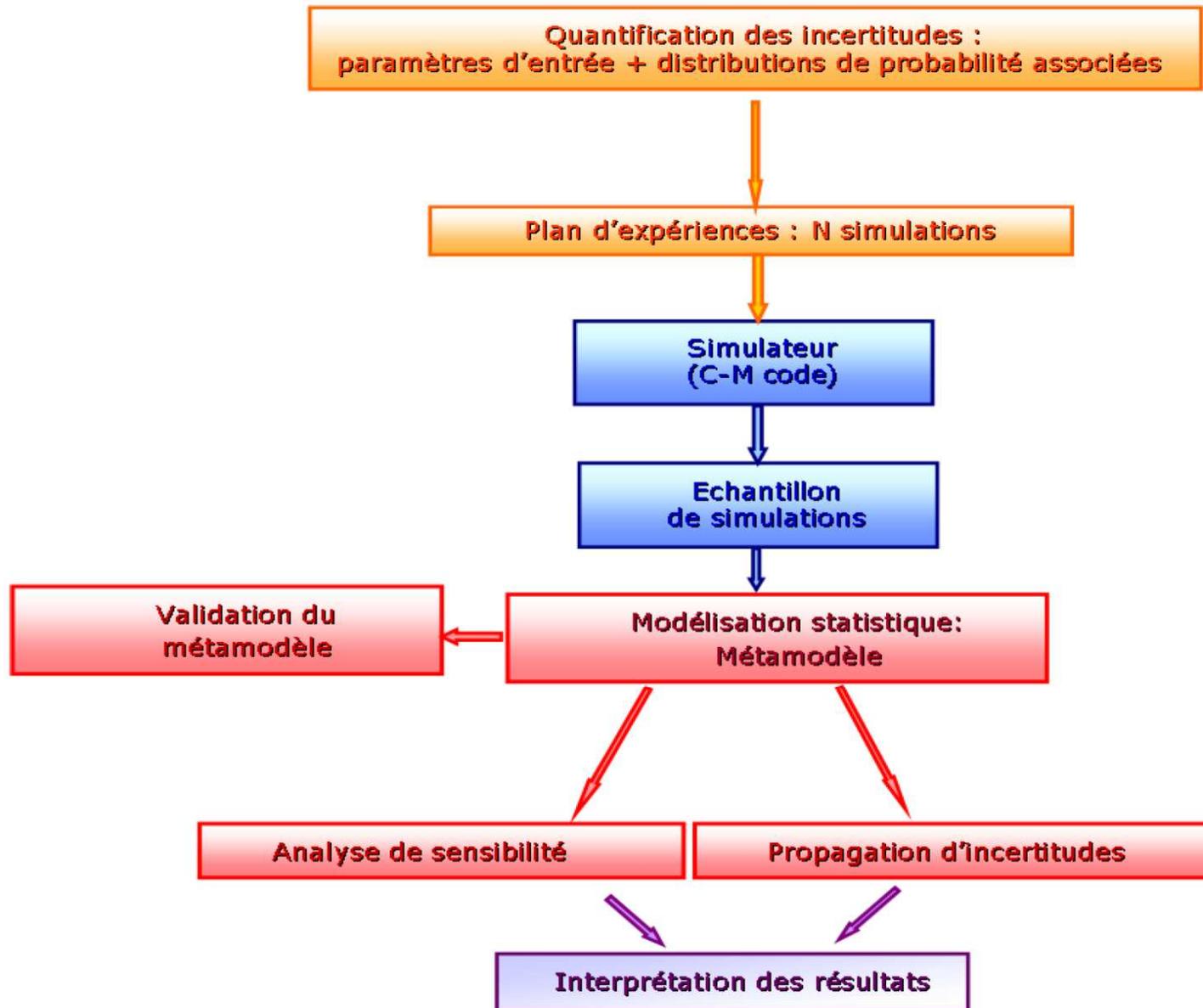
- Grand temps de calcul pour chaque simulation
- Méthodes classiques d'analyse de sensibilité globale => des milliers de simulations
- Sorties spatiales

Solution

- **Construction d'une méthodologie globale combinant différentes techniques statistiques avancées**
 - ❖ **Approximation du code C-M par un métamodèle**
 - ❖ **Analyse de sensibilité**

Illustration sur un cas industriel

Méthodologie



- ▶ **Quantification des incertitudes**
Création d'un simulateur réaliste des chroniques météorologiques
- ▶ **Plan d'expériences**
Hypercube latin ayant des propriétés de recouvrement optimales
- ▶ **Métamodèle**
Décomposition spatiale Orthogonale aux Valeurs propres (POD) + métamodélisation des coefficients principaux de la POD par Processus Gaussiens (PG)
- ▶ **Analyse de sensibilité**
Estimation d'indices basés sur la décomposition de la variance de la sortie
↓
indices de Sobol

Illustration sur un cas industriel

Quantification des sources d'incertitudes

Lois des variables incertaines du scénario

Paramètres		Intervalle de variation	Loi de probabilité associée
Hauteur des points de rejets (en m)	l_1	[7.5; 22.5]	Uniforme
	l_2	[22.5; 67.5]	Uniforme
Vitesse de dépôt (en $m.s^{-1}$)		$[5.10^{-4}; 5.10^{-2}]$	Log-Uniforme
Quantité rejetée (en Bq)		$[10^8; 10^{10}]$	Log-Uniforme
Direction de vent (en degré azimut)		[249; 333]	Processus temporel
Vitesse de vent (en $m.s^{-1}$)		[0; 12.5]	Processus temporel

Lois déterminées par avis d'expert du LMTE

Lois modélisées après étude d'une base de données CEA

Illustration sur un cas industriel

Plan d'expériences et simulations

Nombre total de variables : 4 (rejet) + 12 (météo)

Choix d'un plan d'expériences numériques :

Latin hypercube Sampling maximin (LHS)

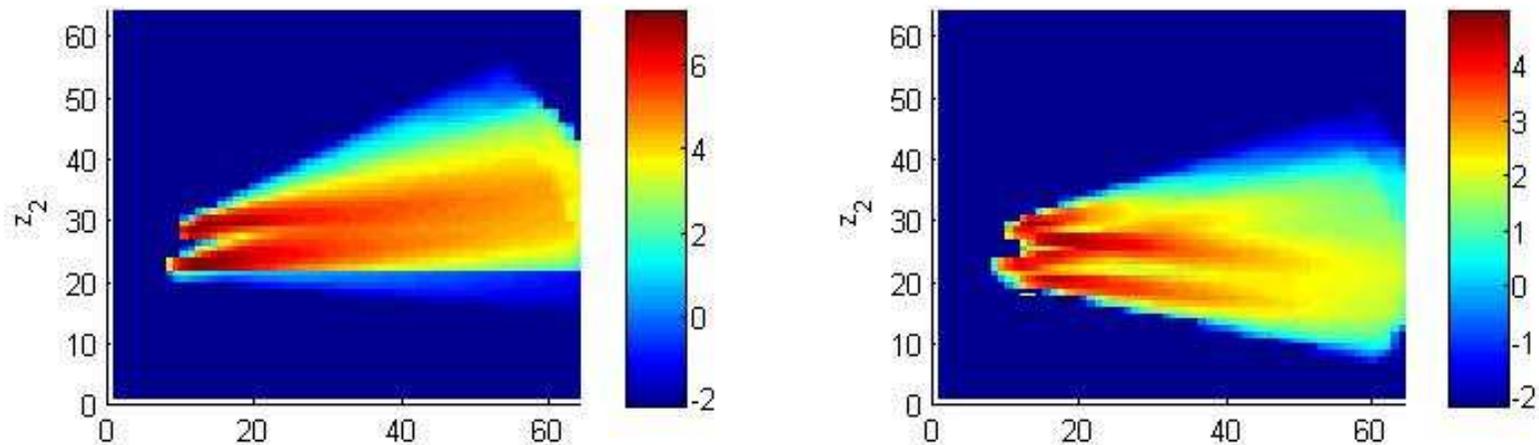
Taille du plan d'expériences :

n=150 simulations

bon compromis entre le nombre d'expériences et l'exploration du domaine de variation des paramètres incertains (une meilleure répartition spatiale des points)

Réalisation des simulations avec Ceres-Mithra :

Constitution de la base d'apprentissage (BA)

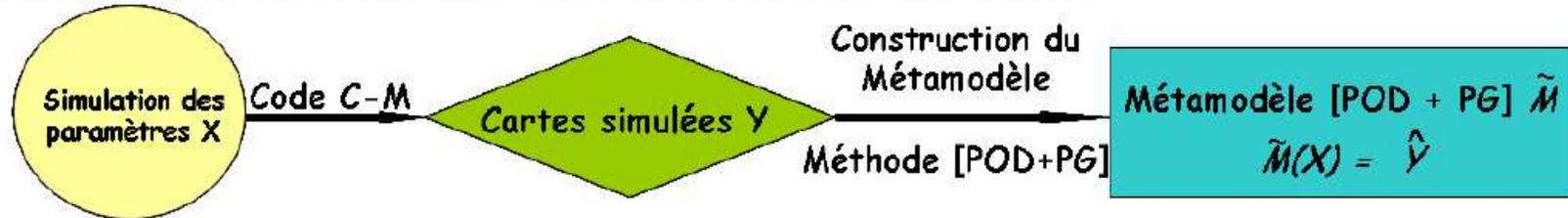


Exemples de cartes d'activité surfacique intégrée du Cs137 (log)

Illustration sur un cas industriel

Modélisation statistique : métamodèle

Méthode de construction du métamodèle



Validation du métamodèle

Validation par le coefficient de prédiction Q^2 .
 Q^2 proche de 1 \Rightarrow bon métamodèle

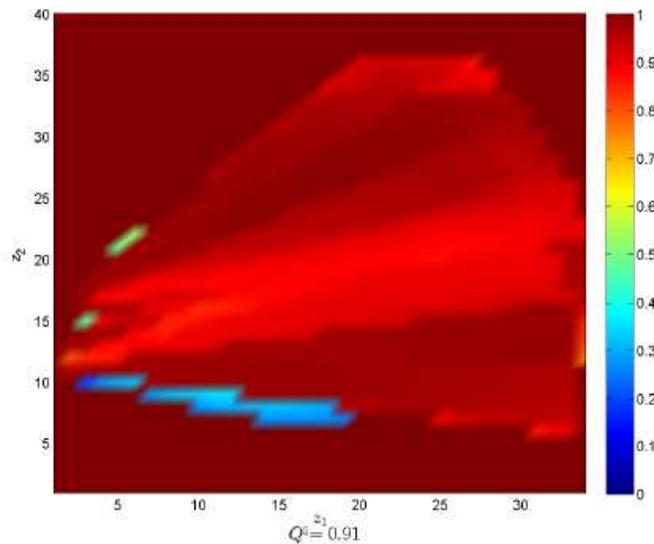


FIGURE: Q^2 du métamodèle pour $t=40$ min.

Utilisation du métamodèle

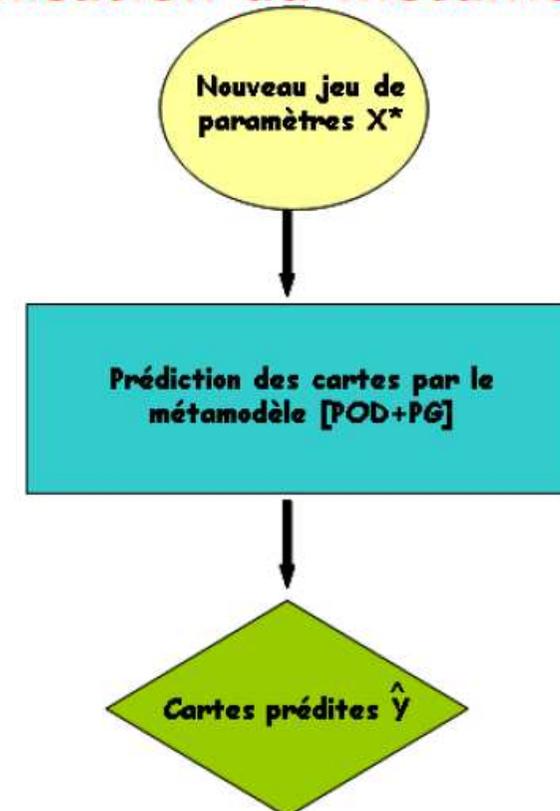


Illustration sur un cas industriel

Analyse de sensibilité : indices de Sobol

« Étude de l'influence des entrées d'un simulateur sur sa sortie. » Saltelli [1999]

Définition des indices de Sobol [2001]

Indices du premier ordre S_i : Mesure l'influence de l'entrée X_i indépendamment des autres.

Indices du second ordre S_{ij} : Mesure l'influence de l'interaction entre l'entrée X_i et l'entrée X_j indépendamment de leurs effets seuls.

Indices totaux S_{T_i} : Mesure l'influence de l'entrée X_i et de l'ensemble de ses interactions.

Estimation des indices de Sobol

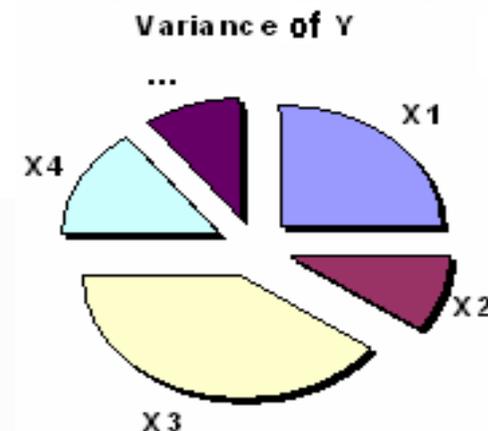
Utilisation de la méthode RBD-FAST (Mara [2009])



Nécessite des milliers de simulations



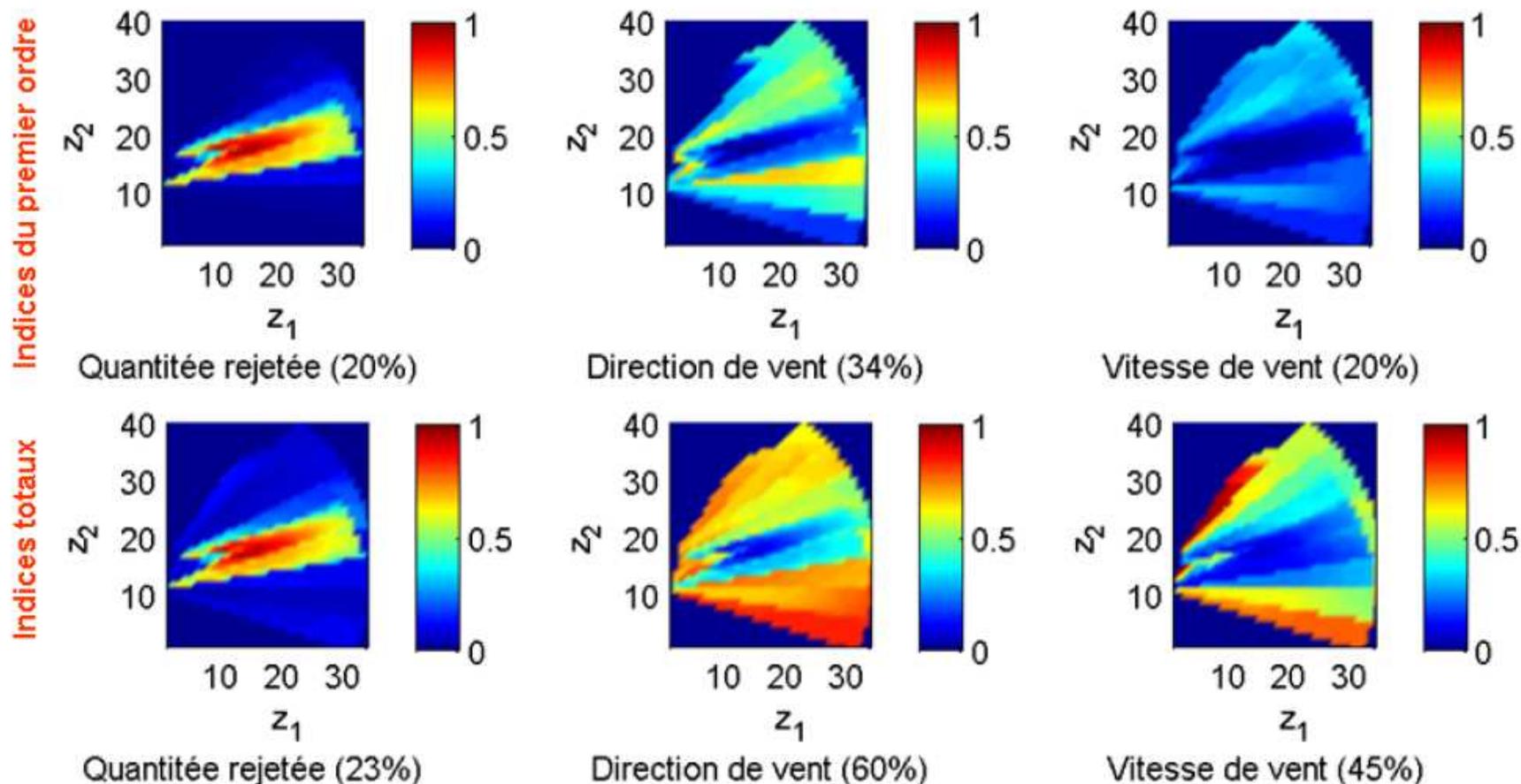
Utilisation du métamodèle



**Weight of input
uncertainties on the output**

Illustration sur un cas industriel

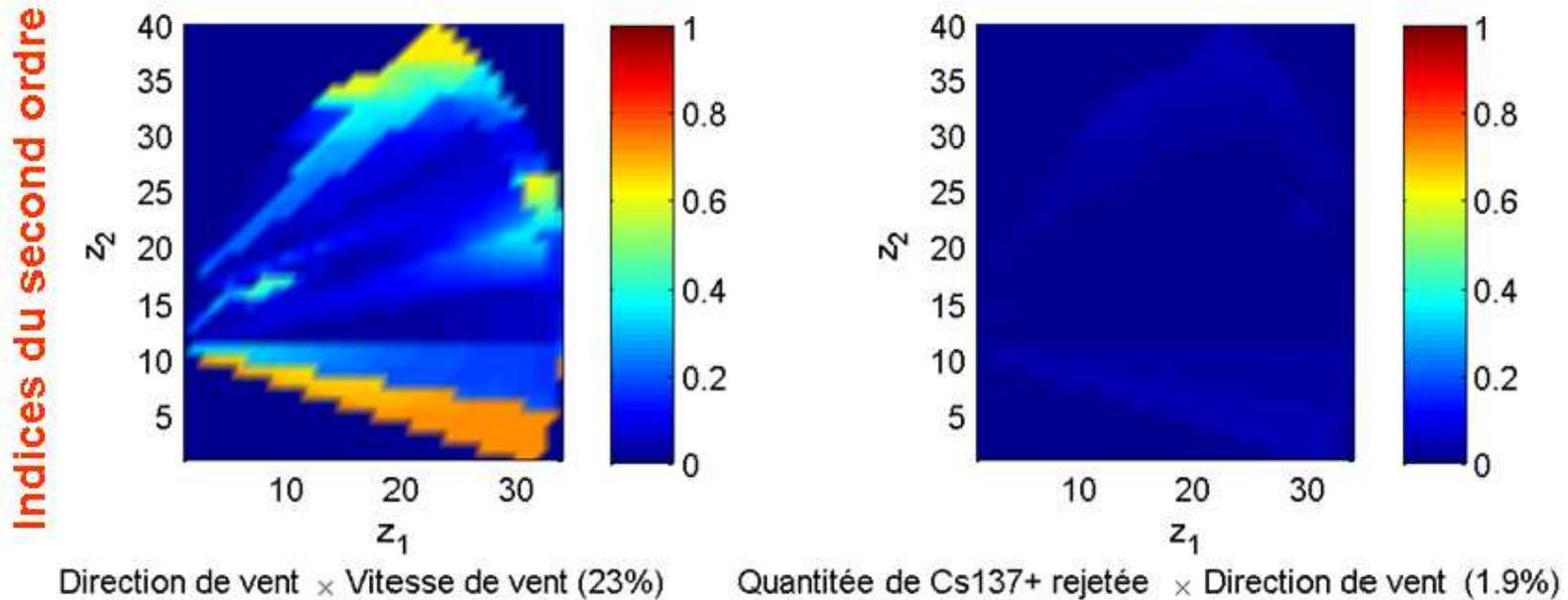
Analyse de sensibilité : indices du 1er ordre (à $T_0+40\text{min}$)



- ▶ **Quantité rejetée** : Influe sur le coeur du panache ;
- ▶ **Direction et vitesse de vent** : Influe sur les bords du panache ;
- ▶ Somme des indices du premier ordre = 74% \Rightarrow 26% d'interactions ;
- ▶ Interaction probable entre la direction et la vitesse de vent.

Illustration sur un cas industriel

Analyse de sensibilité : interactions (à $T_0+40\text{min}$)

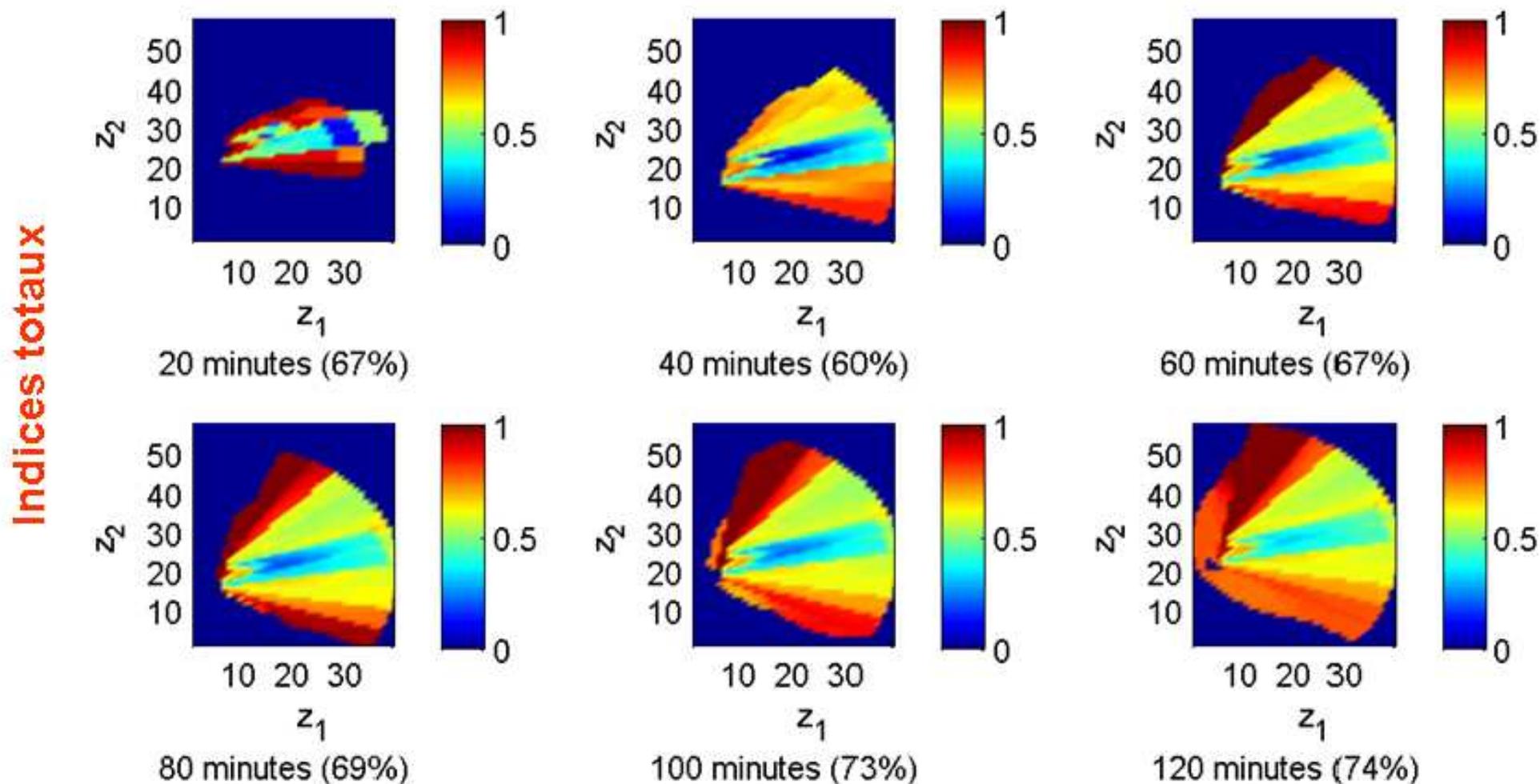


L'interaction *direction de vent* \times *vitesse de vent* influe sur les bords du panache.

- direction de vent (34%);
 - *direction de vent* \times *vitesse de vent* (23%);
 - quantité rejetée de Cs137+ (20%);
 - vitesse de vent (20%);
 - *direction de vent* \times *quantité de Cs137+ rejetée* (2%).
- 99% de variance expliquée!**

Illustration sur un cas industriel

Analyse de sensibilité : évolution temporelle



Forte croissance des indices totaux



Augmentation de la part d'influence des interactions de DV