

Ecole chercheur



**MEXICO**

Juin 2010, Giens, France

# Analyse d'incertitude, analyse de sensibilité. Objectifs et principales étapes

**David Makowski**

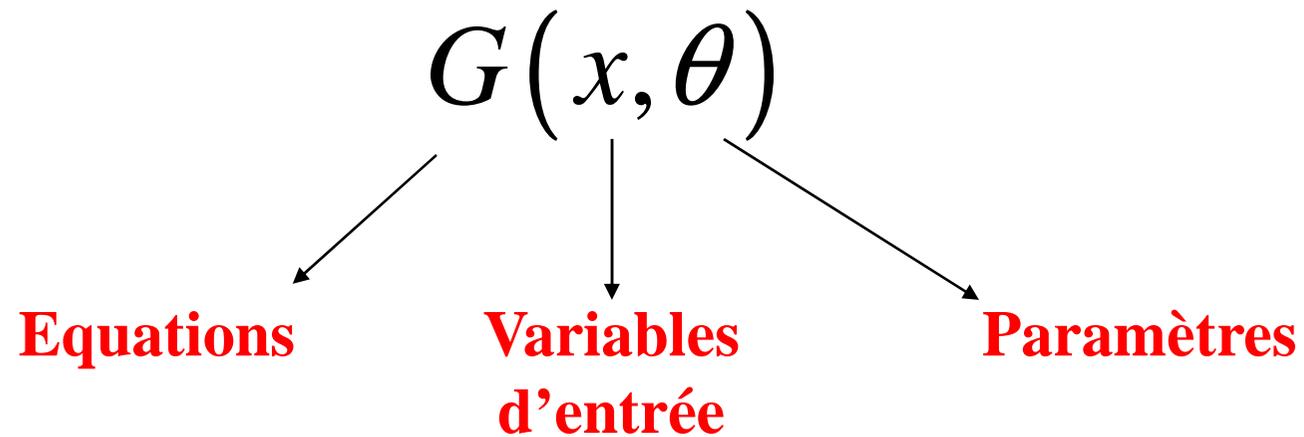
**INRA**

[makowski@grignon.inra.fr](mailto:makowski@grignon.inra.fr)

- 1. Définitions et objectifs**
- 2. Analyse d'incertitude**
- 3. Analyse de sensibilité**
- 4. Etude de cas**

# 1. Définitions et objectifs

## Sources d'incertitude dans un modèle



# Types d'incertitude

- ***Manque de connaissance***

Ex: Température optimale pour le développement d'un champignon pathogène

- ***Erreur de mesures / Echantillonnage***

Ex: Erreur de mesure de la densité de plantes dans une parcelle agricole

- ***Variabilité des caractéristiques du système***

Ex: Variabilité de la « température moyenne journalière » entre années

# Notation

$z$  = variables d'entrée et paramètres incertains  
= facteurs incertains

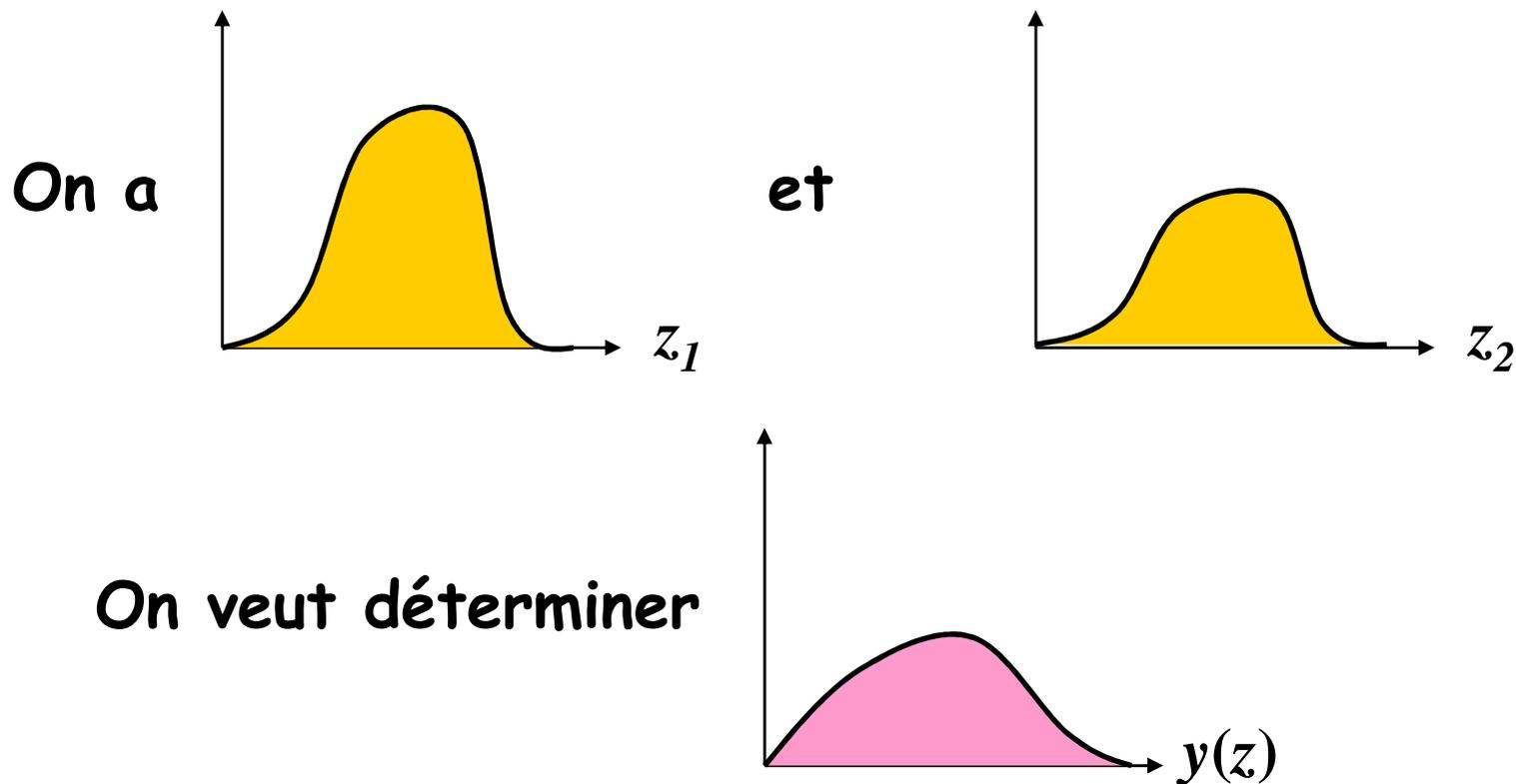
$$z = (z_1, z_2, \dots, z_p)$$

Sortie du modèle  $y(z_1, z_2, \dots, z_p) = y(z)$

# Analyse d'incertitude

Permet de répondre à la question suivante:

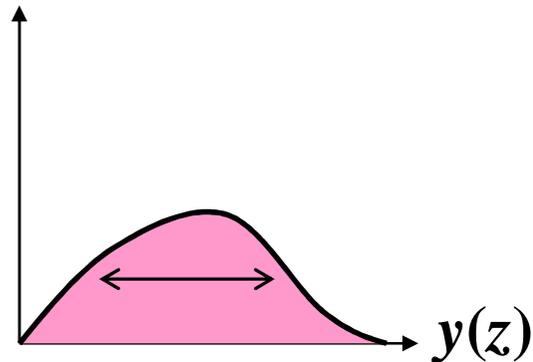
« Quel est le niveau d'incertitude dans  $y(z)$  qui résulte de l'incertitude dans  $z$  ? »



# Analyse de sensibilité

Son objectif est de répondre à la question:

**« Quelles sont les principales sources d'incertitude  
parmi  $z_1, z_2, \dots, z_p$  ? »**



Variance de  $y(z) = \text{effet de } z_1 + \text{effet de } z_2 + \dots$

# Intérêt pratique

## de l'analyse d'incertitude

- donner des informations sur l'incertitude associée aux prédictions d'un modèle
- optimiser des variables décisionnelles

## de l'analyse de sensibilité

- identifier les paramètres et les variables d'entrée qui ont une forte influence sur les sorties d'un modèle

→ *Important de les connaître avec précision*

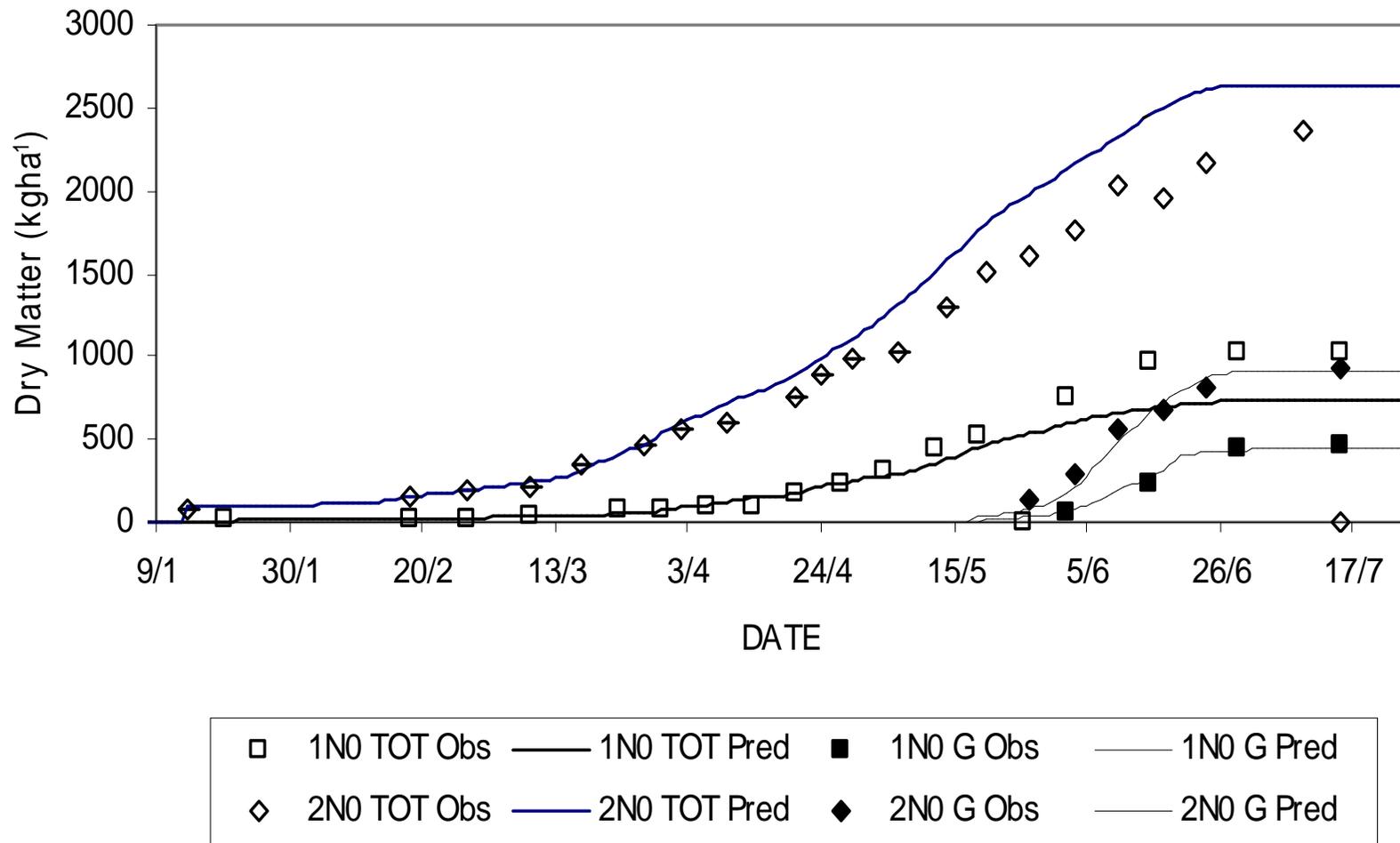
- identifier les paramètres et les variables d'entrée qui ont une influence moindre sur les sorties

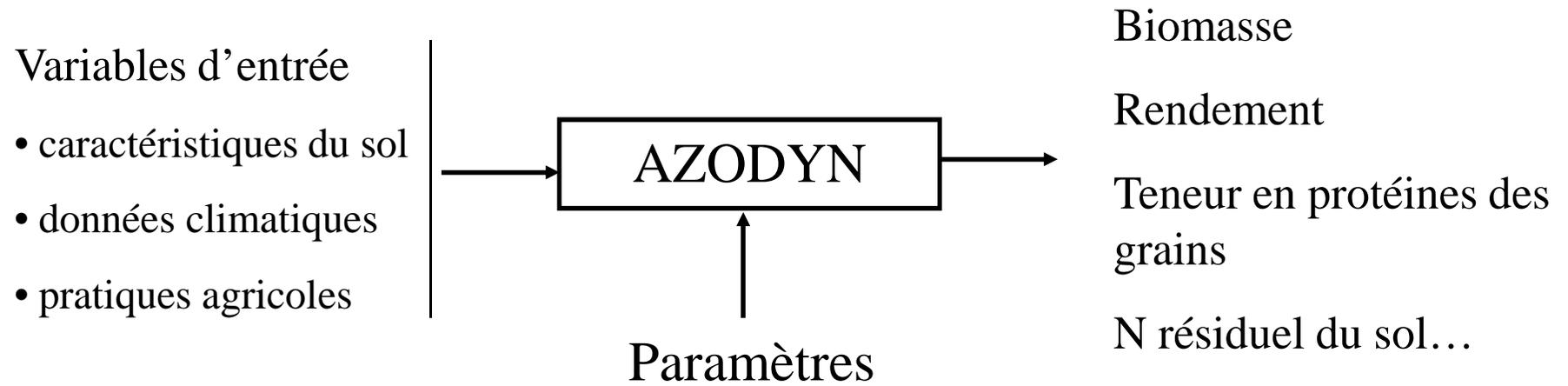
→ *Moins important de les connaître avec précision*

# Exemples de questions pouvant être traitées par AI ou AS

- Est-il important de mesurer précisément les caractéristiques du sol pour prédire le rendement d'une culture ?
- Probabilité qu'une nouvelle mesure de gestion du stock de langoustines soit plus efficace que la mesure actuelle ?
- Quelle est la probabilité de perdre plus de  $0.2 \text{ t ha}^{-1}$  si la dose d'engrais appliquée sur du blé est réduite de 20% ?
- Quels sont les paramètres d'un modèle de culture à estimer en priorité génotype par génotype ?

## Simulations de la biomasse du blé à l'aide du modèle dynamique AZODYN



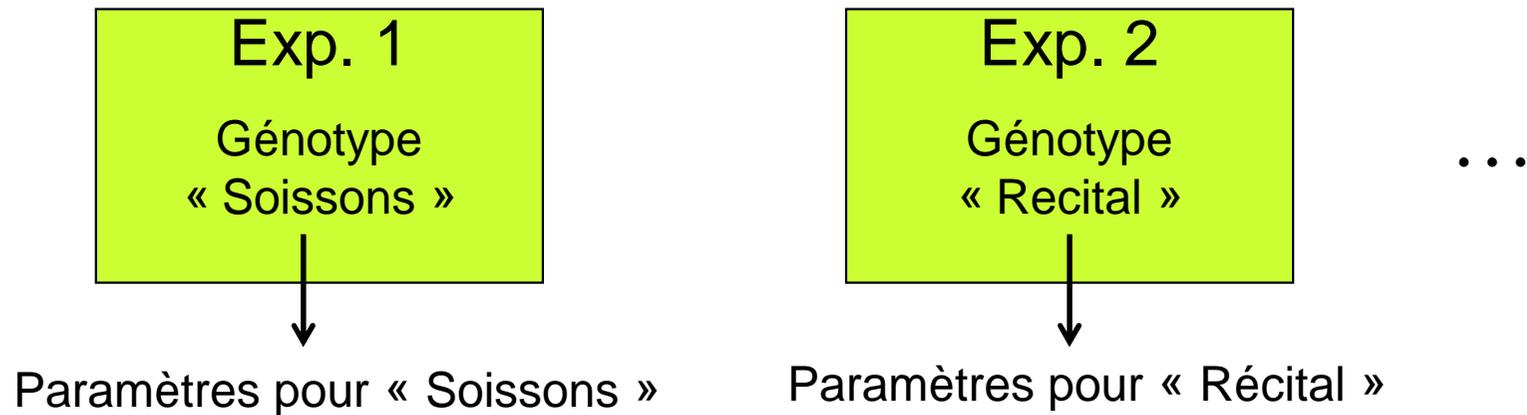


Jeuffroy et Recous, 1999

## Incertitude associée à 13 paramètres potentiellement génotypiques

Parameter	Definition	Range	Unit
RDTMAXVAR	Maximal yield	10.0 - 13.7	t.ha <sup>-1</sup>
Ebmax	Radiation use efficiency	2.7-3.3	g.MJ <sup>-1</sup>
D	Ratio of leaf area index to critical nitrogen	0.02-0.045	-
REMV2	Fraction of remobilized nitrogen	0.5-0.9	-
K	Extinction coefficient	0.6-0.8	-
Eimax	Ratio of intercepted to incident radiation	0.9-0.99	
Tep.flo	Duration between earing and flowering	100-200	°C.day
R	Ratio of total to above ground nitrogen	1.0-1.5	-
P1GMAXVAR	Maximal weight of one grain	47-65	mg
Lambda	Parameter for calculating nitrogen use efficiency	25-45	-
Mu	Parameter for calculating nitrogen use efficiency	0.6-0.9	-
DJPF	Temperature threshold	150-250	°C.day
NGM2MAXVAR	Maximal grain number	107.95-146.05	-

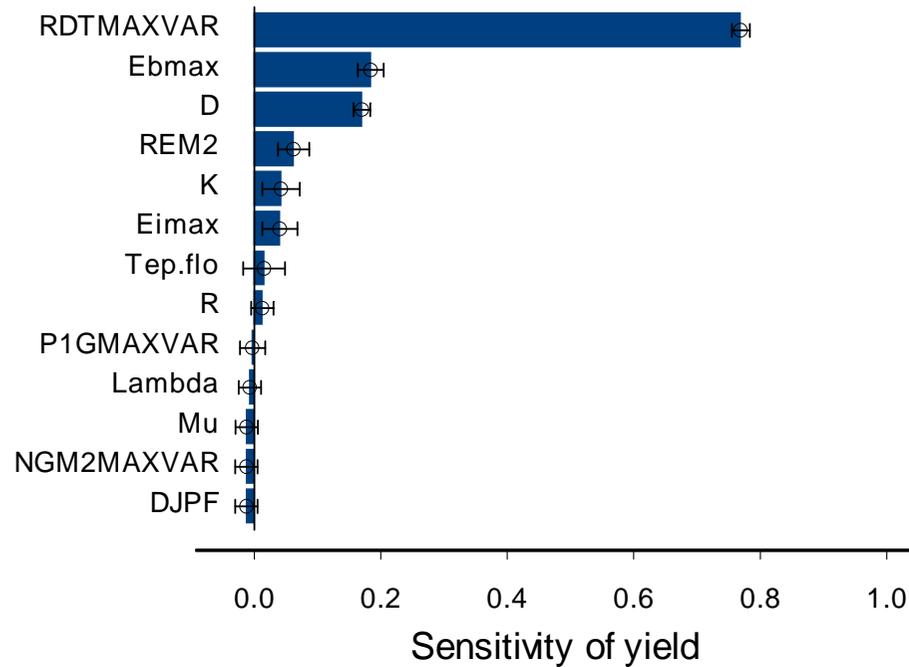
# Quels paramètres doit-on estimer ?



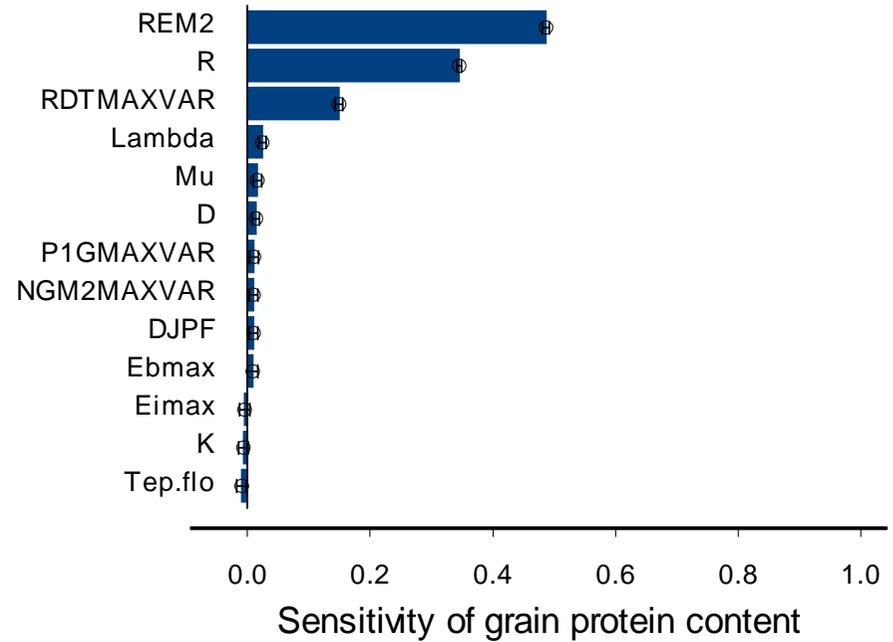
**Coûteux !**

# Indices de sensibilité totale pour les simulations de rendement et de teneur en protéines

## Rendement



## Teneur en protéines



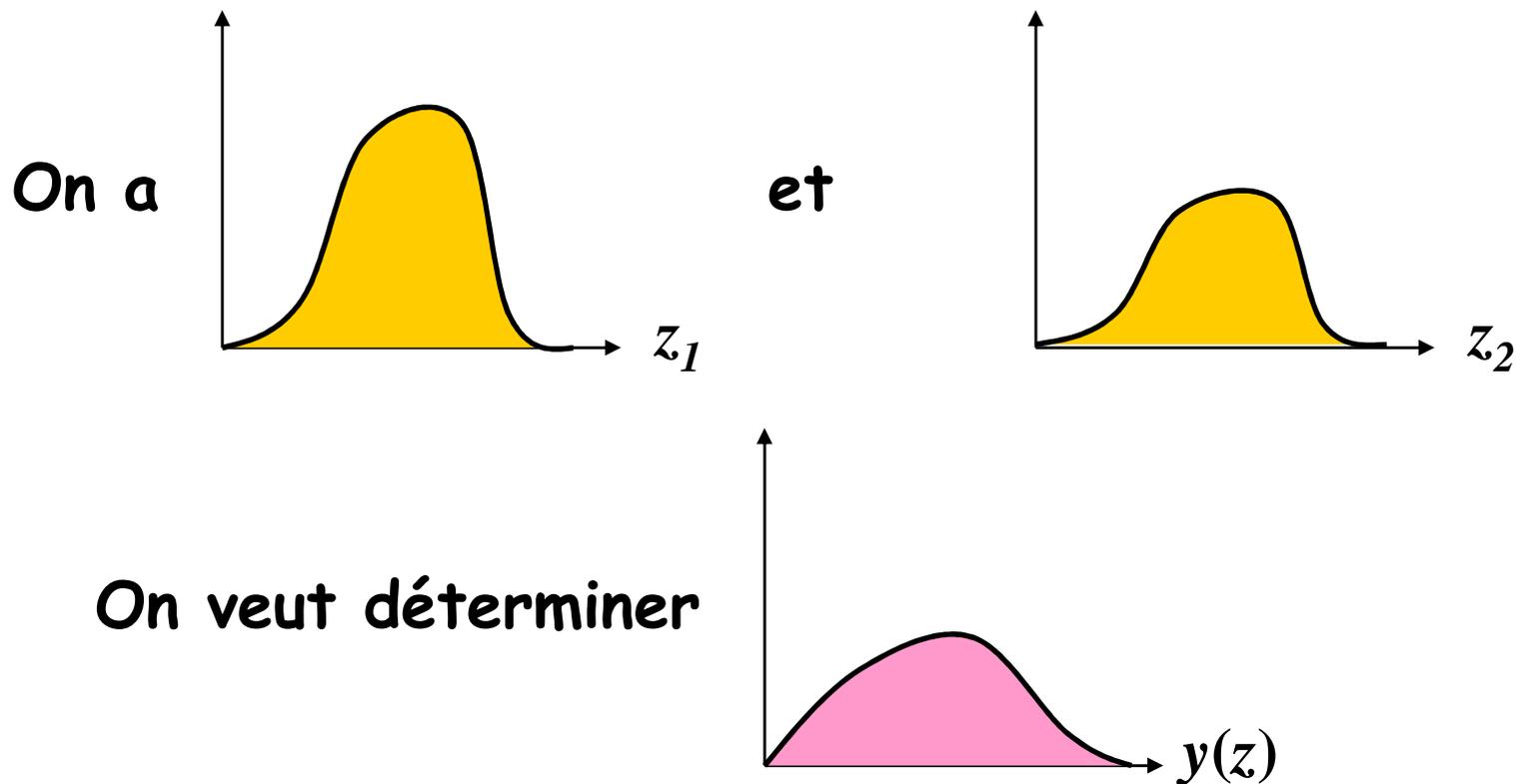
Makowski et al. 2005

## 2. Analyse d'incertitude

# Analyse d'incertitude

Permet de répondre à la question suivante:

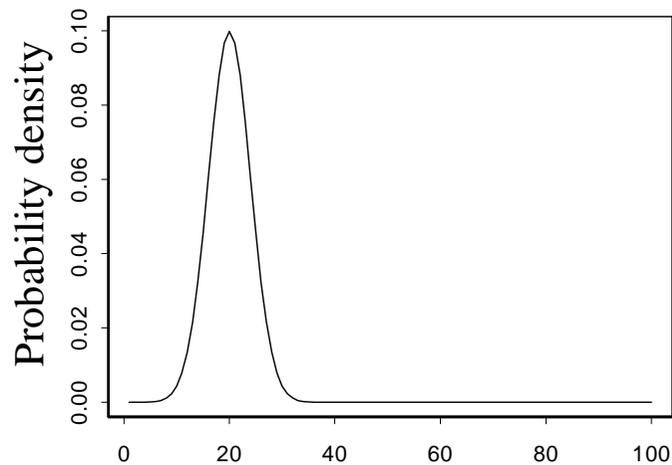
« Quel est le niveau d'incertitude dans  $y(z)$  qui résulte de l'incertitude dans  $z$  ? »



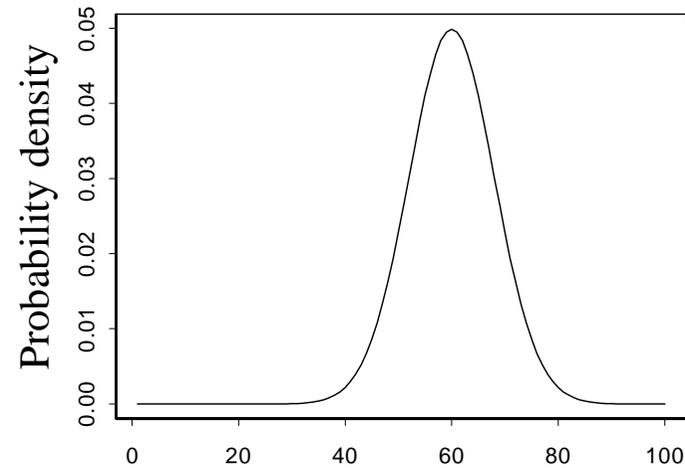
# Application à un modèle très simple

Equation:  $y(z_1, z_2) = z_1 + 2 z_2$

Incertitude sur  $z_1$  et  $z_2$  :  $z_1 \sim N(20, 16)$  et  $z_2 \sim N(60, 64)$



Value of  $z_1$



Value of  $z_2$

**Question: Réaliser une analyse d'incertitude**

# Application à un modèle très simple

*« Vous devez déterminer la distribution de probabilité de  $y(z_1, z_2)$  à partir des distributions de  $z_1$  et  $z_2$  » .*

## Propriétés:

Si  $z_1$  et  $z_2$  sont deux variables indépendantes de distribution Gaussienne alors

$A z_1 + B z_2$  suit une distribution Gaussienne

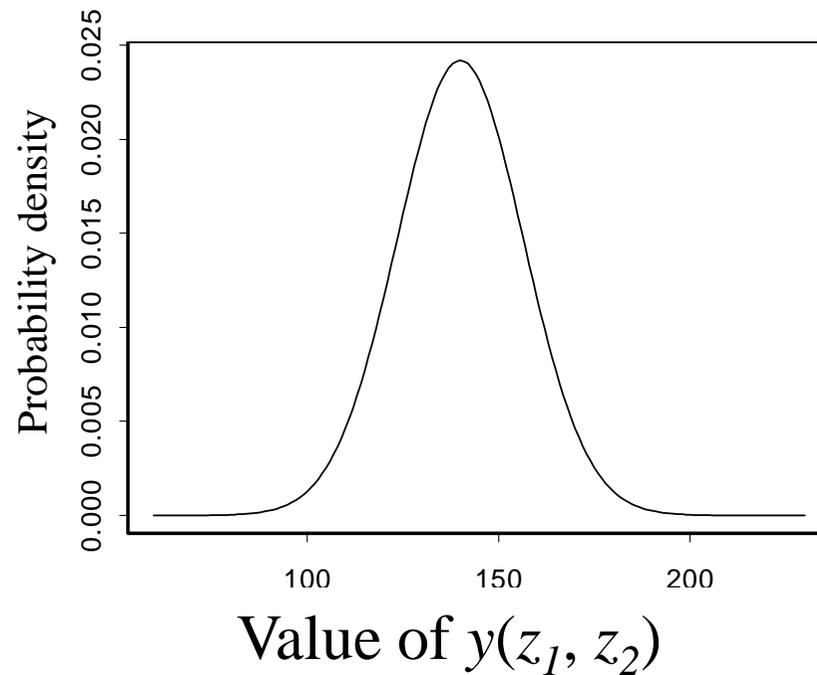
$$E(A z_1 + B z_2) = A E(z_1) + B E(z_2)$$

$$\text{var}(A z_1 + B z_2) = A^2 \text{var}(z_1) + B^2 \text{var}(z_2)$$

# Application à un modèle très simple

Pour ce modèle simple, on peut déterminer l'expression exacte de  $y(z_1, z_2)$  :

$$y(z_1, z_2) \sim N(140, 272)$$



## En général, c'est plus dur !

- **Equations plus complexes, relation non linéaire entre  $y(z)$  et  $z$** 
  - Pas possible de déterminer l'expression analytique de la distribution de  $y(z)$
- **La distribution de  $z$  n'est pas toujours connue**
  - Choix subjectif
- **Temps de calcul parfois long avec certains modèles**
  - Le nombre de simulations est limité

# Quatre étapes

- 1. Définir les distributions de  $z_1, \dots, z_p$ .**
- 2. Générer des échantillons à partir des distributions définies à l'étape 1**
- 3. Calculer  $y(z)$  pour chaque série de  $z_1, \dots, z_p$  générée**
- 4. Estimer la distribution de  $y(z)$**

# Étape 1. Définition des distributions

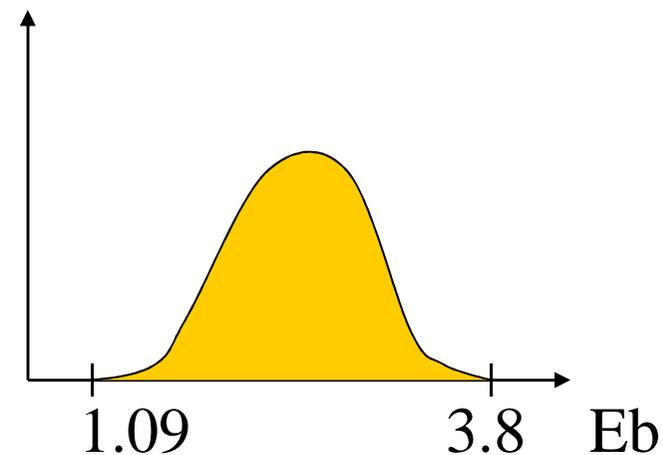
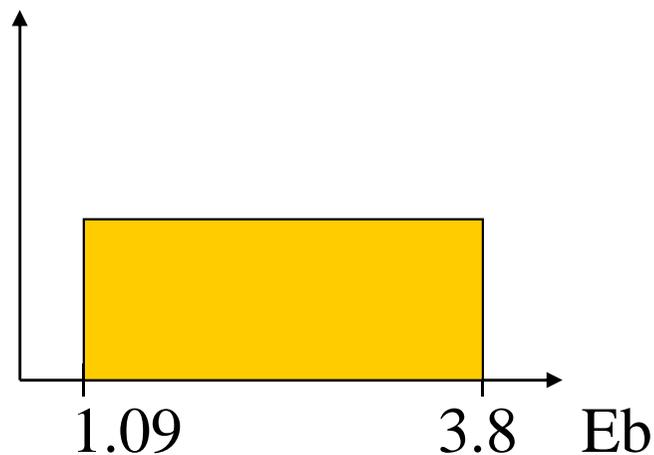
Les distributions de probabilité des facteurs incertains (paramètres ou variables d'entrée) peuvent être définies en utilisant :

- **La littérature scientifique et l'expertise**
- **Des séries de mesures (série climatique...)**
- **Les valeurs des paramètres estimées**

# Étape 1. Définition des distributions

## *Exemple:*

d'après un article publié par Jeuffroy et Recous en 1999 dans EJA, l'efficacité d'utilisation de rayonnement intercepté varie entre **1.09** et **3.8 g.MJ<sup>-1</sup>** pour le blé



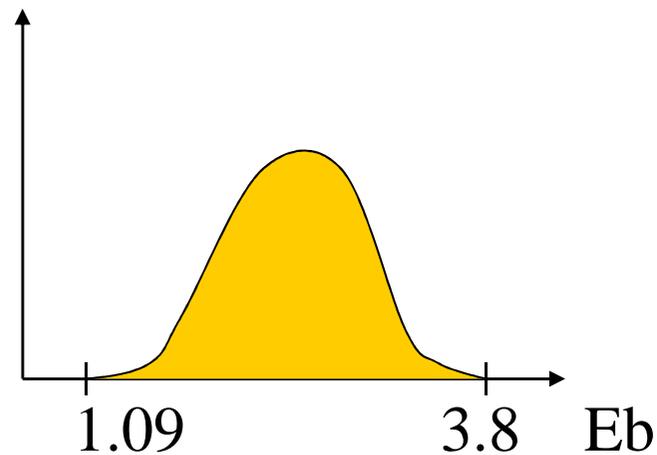
**1. Définition des distributions de  $z_1, \dots, z_p$ .**

**2. Génération d'échantillons à partir des distributions définies à l'étape 1.**

## Étape 2. Génération d'échantillons à partir des distributions de $z_1, \dots, z_p$

- Il faut générer suffisamment de valeurs de  $z_1, z_2, \dots, z_p$
- Différentes méthodes d'échantillonnage peuvent être utilisées:
  - échantillonnage aléatoire
  - échantillonnage en hypercube latin
  - ...
- En pratique, on utilise un logiciel pour générer  $N$  valeurs de  $z_1, z_2, \dots, z_p$  (ex:  $N=20000$ ).

## Étape 2. Génération d'échantillons à partir des distributions de $z_1, \dots, z_p$



On génère un échantillon de valeurs de  $E_b$  issues de sa distribution :

1.2, 1.9, 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.7, 3.1, 3.7...

## Étape 2. Génération d'échantillons à partir des distributions de $z_1, \dots, z_p$

	$z_1$	$z_2$	...	$z_p$
Série 1	1.21	0.85	...	0.99
Série 2	1.97	0.72	...	0.92
...	...	...	...	...
Série N	3.70	0.75	...	0.91

- 1. Définition des distributions de  $z_1, \dots, z_p$ .**
- 2. Génération d'échantillons à partir des distributions définies à l'étape 1.**
- 3. Calcul de  $y(z)$  pour chaque série  $z_1, \dots, z_p$  générée.**

### Étape 3. Calcul de $\gamma(z)$ pour chaque série de $z_1, \dots, z_p$ générée

- La difficulté de cette étape dépend du niveau de complexité du modèle.
- Le temps de calcul peut être long avec certains modèles particulièrement complexes.

Étape 3. Calcul de  $y(z)$  pour chaque série  $z_1, \dots, z_p$  générée

	$z_1$	$z_2$	...	$z_p$	$y(z)$
Série 1	1.21	0.85	...	0.99	90.9
Série 2	1.97	0.72	...	0.92	95.2
...	...	...	...	...	...
Série N	3.70	0.75	...	0.91	81.5

- 1. Définition des distributions de  $z_1, \dots, z_p$ .**
- 2. Génération d'échantillons à partir des distributions définies à l'étape 1.**
- 3. Calcul de  $y(z)$  pour chaque série  $z_1, \dots, z_p$  générée.**
- 4. Approximation de la distribution de  $y(z)$ .**

## Étape 4. Approximation de la distribution de $y(z)$

- **Décrire les  $N$  valeurs de  $y(z)$  calculées à l'étape 3.**
- **Étape souvent assez facile.**
- **Différentes approches possibles**
  - calcul de la moyenne et de la variance,
  - calcul de quantiles (quartiles, déciles...),
  - histogramme,
  - fonction de distribution cumulée,
  - box plot ...

# Application au modèle simple

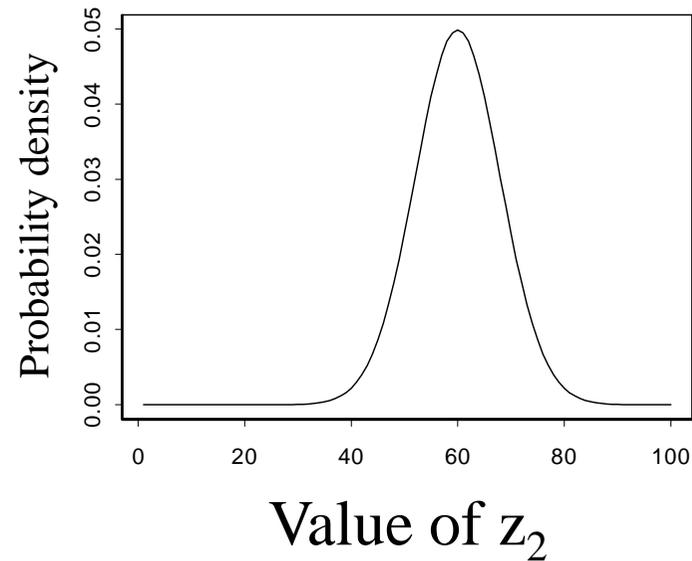
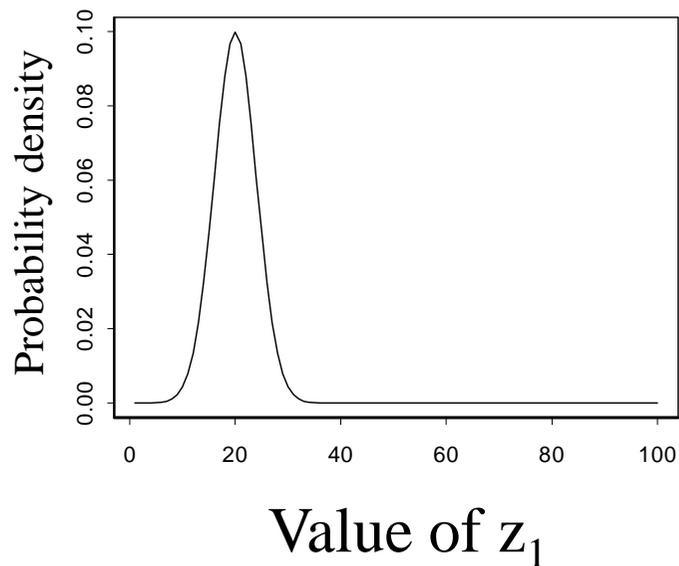
- Approche en 4 étapes pas nécessaire pour ce modèle car on peut calculer analytiquement la distribution de  $y(z_1, z_2)$
- On applique cette approche à ce modèle uniquement pour montrer qu'elle marche bien.

# Application au modèle simple

## Etape 1

Equation :  $y(z_1, z_2) = z_1 + 2 z_2$

Incertitude sur  $z_1$  et  $z_2$  :  $z_1 \sim N(20, 16)$ ,  $z_2 \sim N(60, 64)$



# Application au modèle simple

## Etape 2

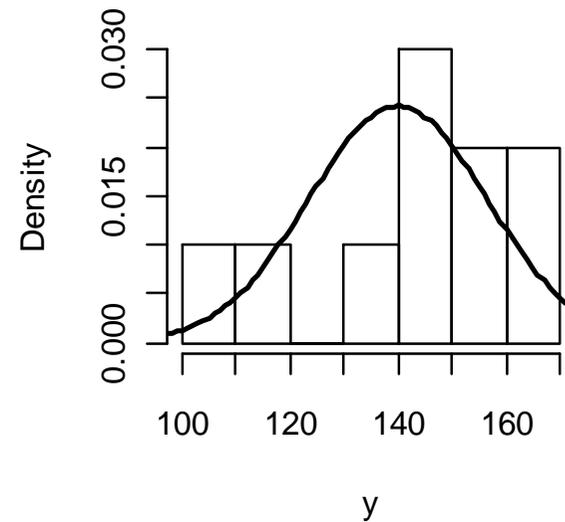
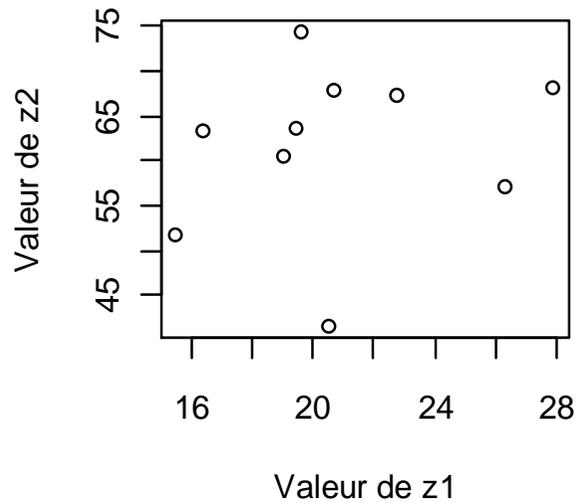
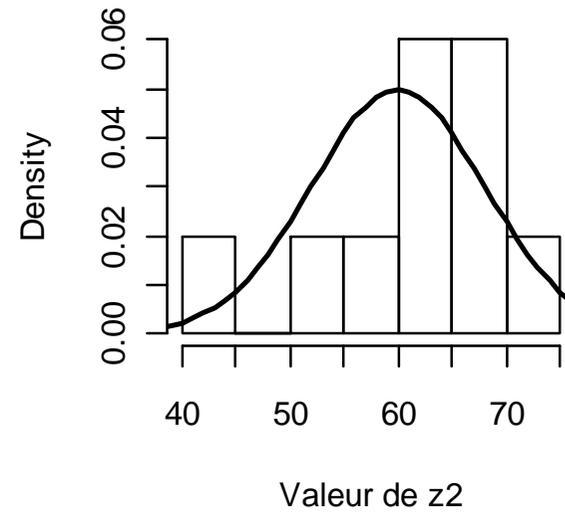
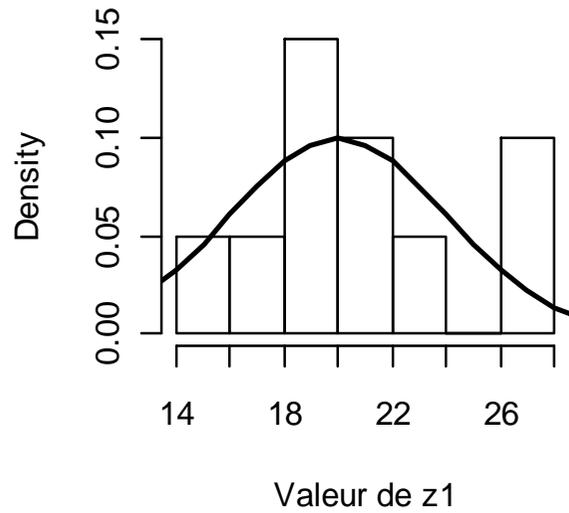
- $N$  valeurs de  $z_1$  et  $z_2$  sont générées
- Plusieurs valeurs de  $N$  sont considérées successivement

$$N = 10$$

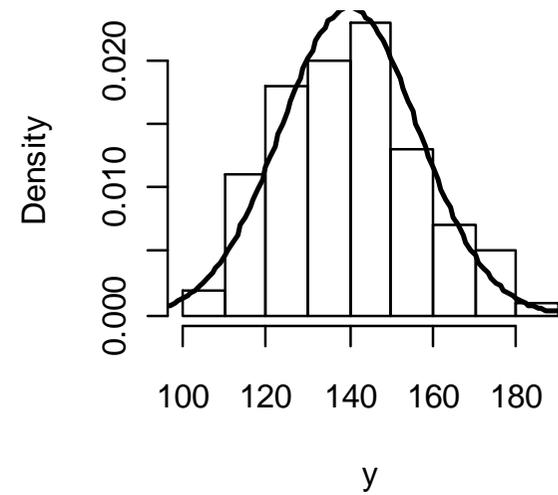
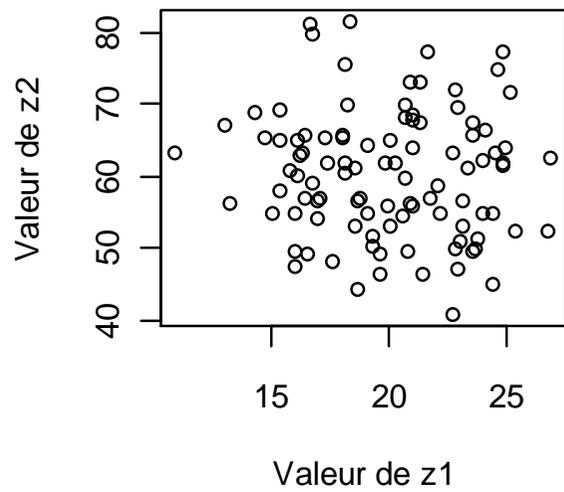
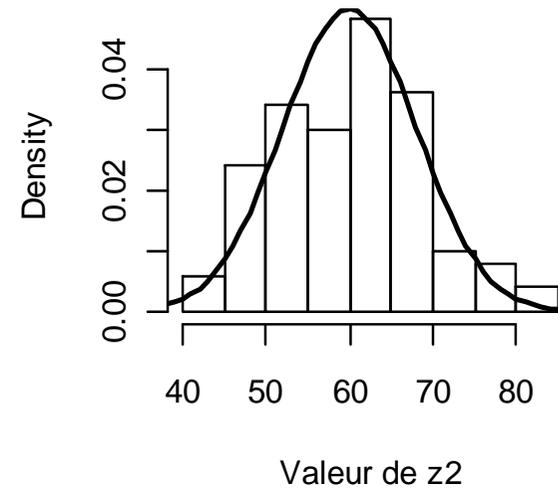
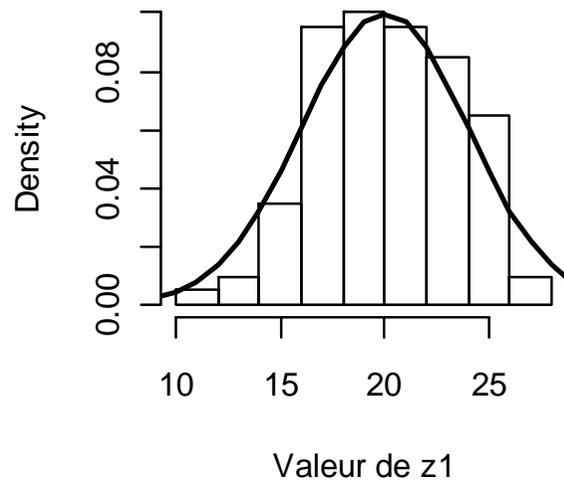
$$N = 100$$

$$N = 1000$$

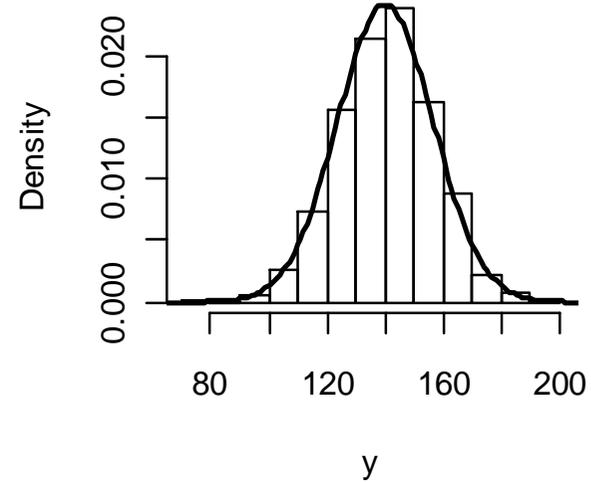
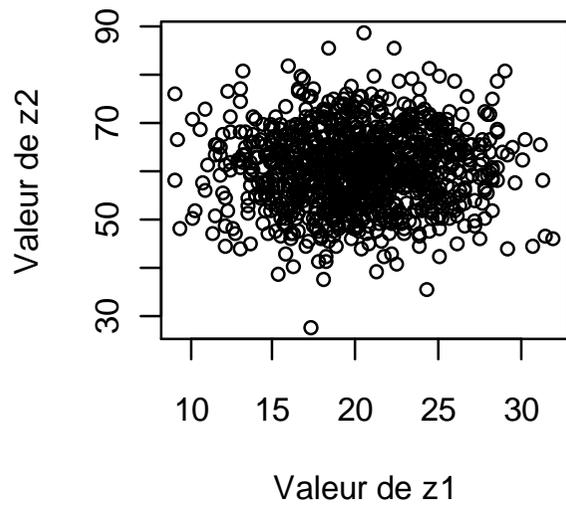
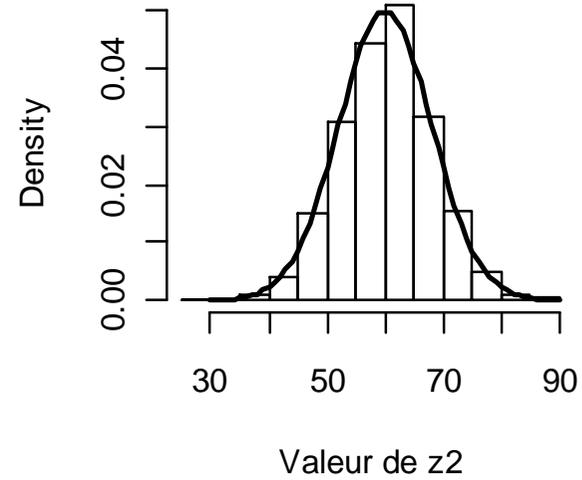
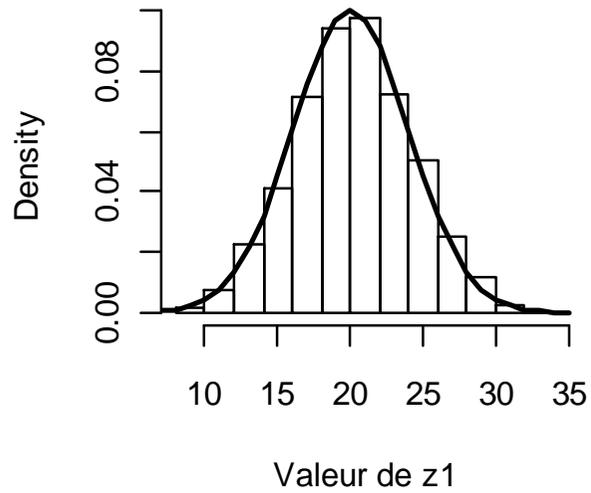
# Application. Etape 2. $N=10$



## Application. Etape 2. $N=100$



## Application. Etape 2. $N=1000$



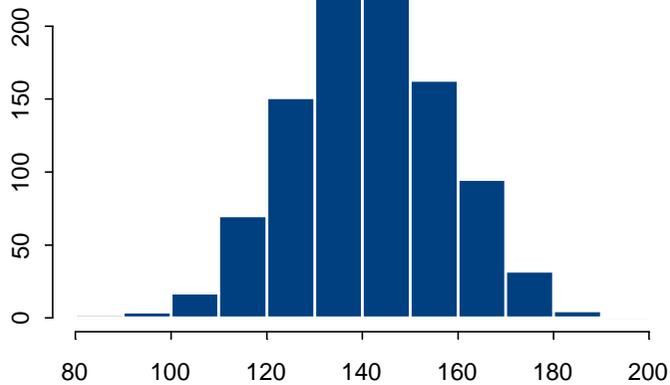
## Application. Etape 3

$z_1$	$z_2$	$y(z_1, z_2)$
16.83	59.30	
23.18	52.33	
16.43	57.85	
20.45	49.25	
25.48	66.11	
25.67	55.53	
24.67	61.55	
17.88	52.58	
23.69	58.54	
17.69	47.38	

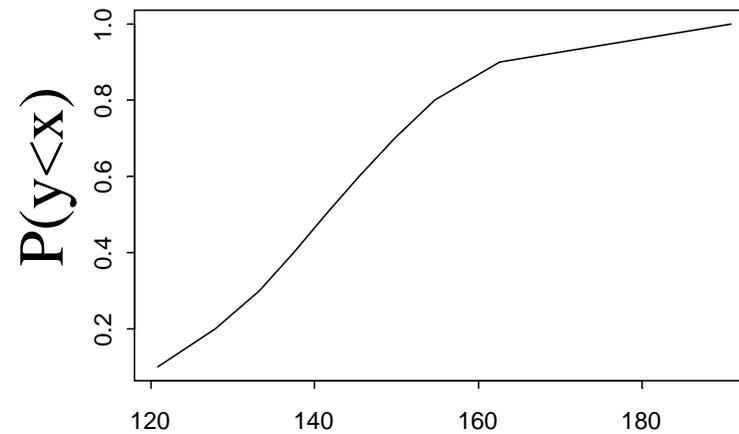
## Application. Etape 3

$z_1$	$z_2$	$y(z_1, z_2)$
16.83	59.30	135.43
23.18	52.33	127.84
16.43	57.85	132.13
20.45	49.25	118.95
25.48	66.11	157.71
25.67	55.53	136.73
24.67	61.55	147.77
17.88	52.58	123.04
23.69	58.54	140.78
17.69	47.38	112.45

# Application. Etape 4. $N=1000$



Value of  $y(z_1, z_2)$



Value of  $y(z_1, z_2)$

## Application. Etape 4

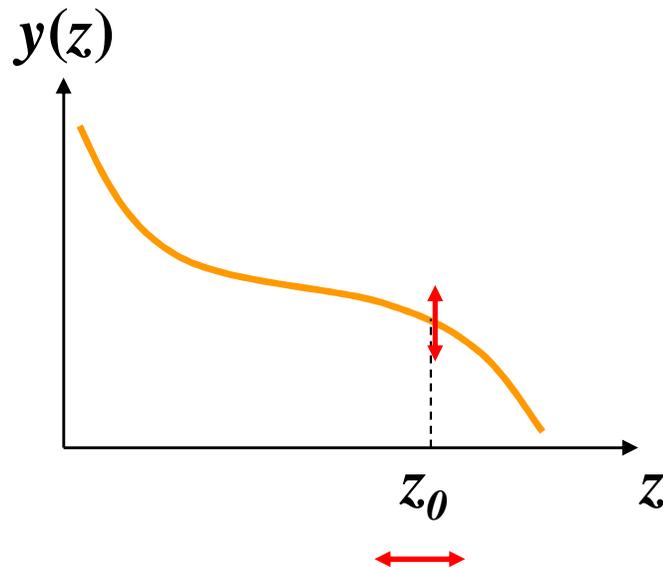
	Mean	Variance	Standard-deviation
N =10	133.28	183.85	13.56
N = 100	138.71	294.96	17.17
N = 1000	141.34	258.23	16.07
N = 5000	139.72	272.51	16.51
N = 7000	139.90	269.45	16.42
True values	140	272	16.49

## 3. Analyse de sensibilité

# Analyse de sensibilité locale ou Analyse de sensibilité globale ?

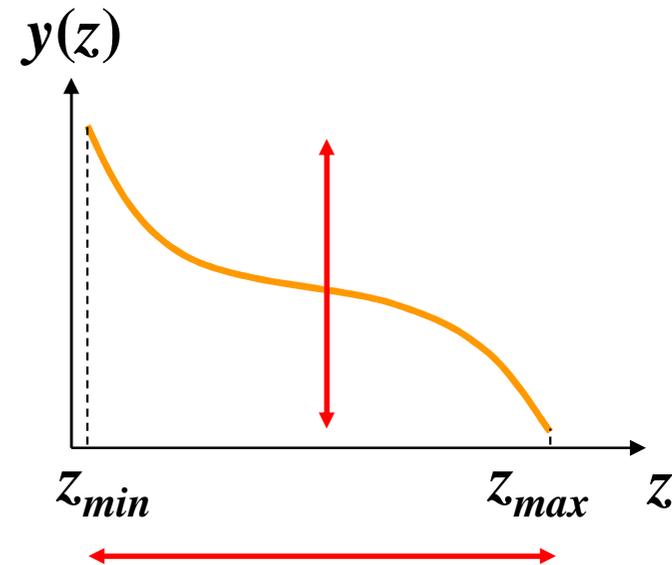
## AS locale

Variation de  $y(z)$  « autour »  $z_0$



## AS globale

Variation globale de  $y(z)$  quand  $z$  varie dans son domaine d'incertitude



## Intérêt pratique de l'analyse de sensibilité

i) Identifier les paramètres et les variables d'entrée qui influencent fortement les sorties du modèle

→ *Important de les connaître précisément*

ii) Identifier les paramètres et les variables d'entrée qui n'ont pas une forte influence sur les sorties du modèle

→ *Moins important de les connaître précisément*

iii) Analyser le comportement du modèle

# Analyse de sensibilité locale

Basée sur le calcul de dérivé

# Analyse de sensibilité globale

Elle consiste à

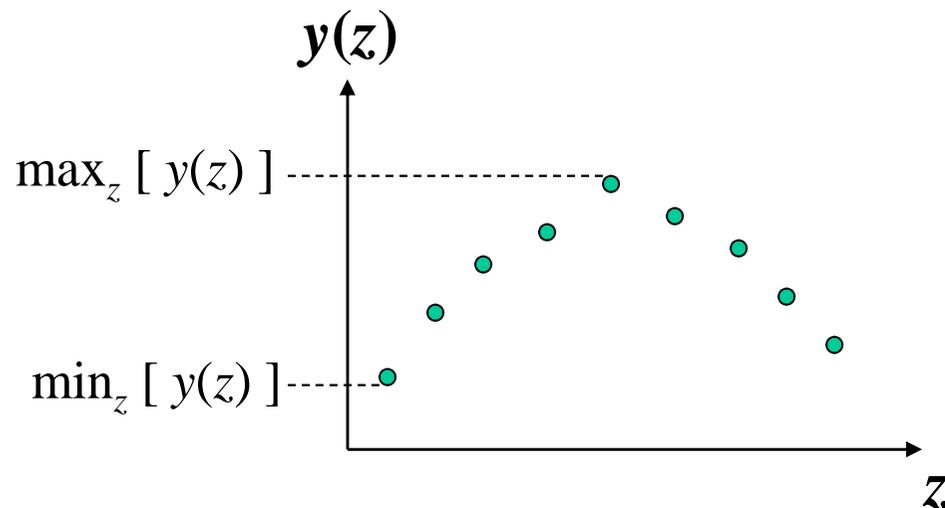
- Définir des indices de sensibilité
- Calculer ces indices en faisant varier les facteurs incertains  $z_1, \dots, z_p$  sur leurs domaines

# Un indice de sensibilité simple

Bauer and Hamby (1991)

- On définit une **série de valeurs** pour chaque facteur.
- On fixe tous **les facteurs sauf  $z_i$**  à des **valeurs de référence**.
- On calcule pour **le facteur  $z_i$**  l'indice:

$$I_{z_i} = \{ \max_{z_i} [ y(z) ] - \min_{z_i} [ y(z) ] \} / \max_{z_i} [ y(z) ]$$



# Application

Equation:  $y(z_1, z_2) = z_1 + 2 z_2$

Définir cinq valeurs pour  $z_2$ : 40, 50, 60, 70, 80.

Fixer  $z_1$  à 20.

**Quelle est la valeur de l'indice de Bauer-Hamby index pour  $z_2$ ?**

# Application

$$\max_{z_2} [ y(z_1=20, z_2) ] = 20 + 2*80 = 180$$

$$\min_{z_2} [ y(z_1=20, z_2) ] = 20 + 2*40 = 100$$

$$I_{z_2} = (180 - 100) / 180 = 0.444$$

# Limite de l'indice de Bauer-Hamby

- Chaque facteur est analysé séparément
- La valeur de l'indice peut dépendre des valeurs de référence

Exemple:

$$y(z_1, z_2, z_3) = z_1 + 2 * z_2 * z_3.$$

$$I_{z_2} = 0 \text{ si } z_3 = 0.$$

$$I_{z_2} \neq 0 \text{ si } z_3 \neq 0.$$

**Interactions entre facteurs non prise en compte**

# Indices de sensibilité basés sur une décomposition de la variance

$$\text{Var}[ y(\mathbf{z}) ] = \underbrace{V_{z_1} + V_{z_2} + V_{z_3} + \dots}_{\text{Effets principaux des facteurs incertains}} + \underbrace{V_{z_1.z_2} + V_{z_1.z_3} + \dots}_{\text{Termes d'interactions}}$$

$\swarrow$   
Variance totale de la variable de sortie

**Indice de premier ordre de  $z_1 = V_{z_1} / \text{Var}[ y(\mathbf{z}) ]$**

**Indice de sensibilité total de  $z_1 = ( V_{z_1} + V_{z_1.z_2} + V_{z_1.z_3} + \dots ) / \text{Var}[ y(\mathbf{z}) ]$**

## Signification de l'indice de sensibilité totale

- **Indice de sensibilité total de  $z_i$  ( $IT_i$ ) = Fraction de la variance totale de  $y$  si seulement  $z_i$  est inconnu.**
- $IT_i$  est compris entre 0 et 1.

$IT_i$  proche de 0

→ Pas nécessaire d'estimer précisément  $z_i$

$IT_i$  proche de 1

→ Probablement important d'estimer précisément  $z_i$

AS globale = les trois premières étapes de l'AI  
+ une quatrième étape spécifique

1. Définition des distributions de  $z_1, \dots, z_p$ .
2. Génération d'échantillons à partir des distributions définies à l'étape 1.
3. Calcul de  $y(z)$  pour chaque série  $z_1, \dots, z_p$  générée.
4. Calcul d'indices de sensibilité.

# Il existe de nombreuses méthodes pour calculer les indices de sensibilité

ANOVA

Régression

Morris

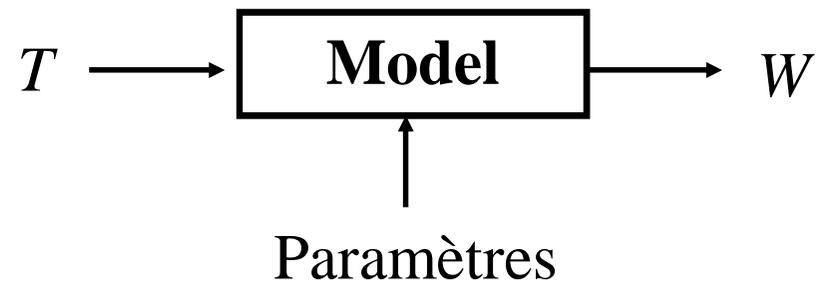
Sobol

FAST/FAST étendu

etc.

# Etude de cas

**Un modèle générique pour calculer la durée (en heures) requise  
d'humidité pour qu'un champignon puisse infecter une plante  
(Magarey *et al.*, 2005)**



$W$  = durée d'humidité requise (h)

$T$  = température moyenne (°C)

**Un modèle générique pour calculer la durée (h) requise  
d'humidité pour qu'un champignon puisse infecter une plante**

**(Magarey *et al.*, 2005)**

$W = W_{\min} / f(T)$  , mais inférieure à  $W_{\max}$

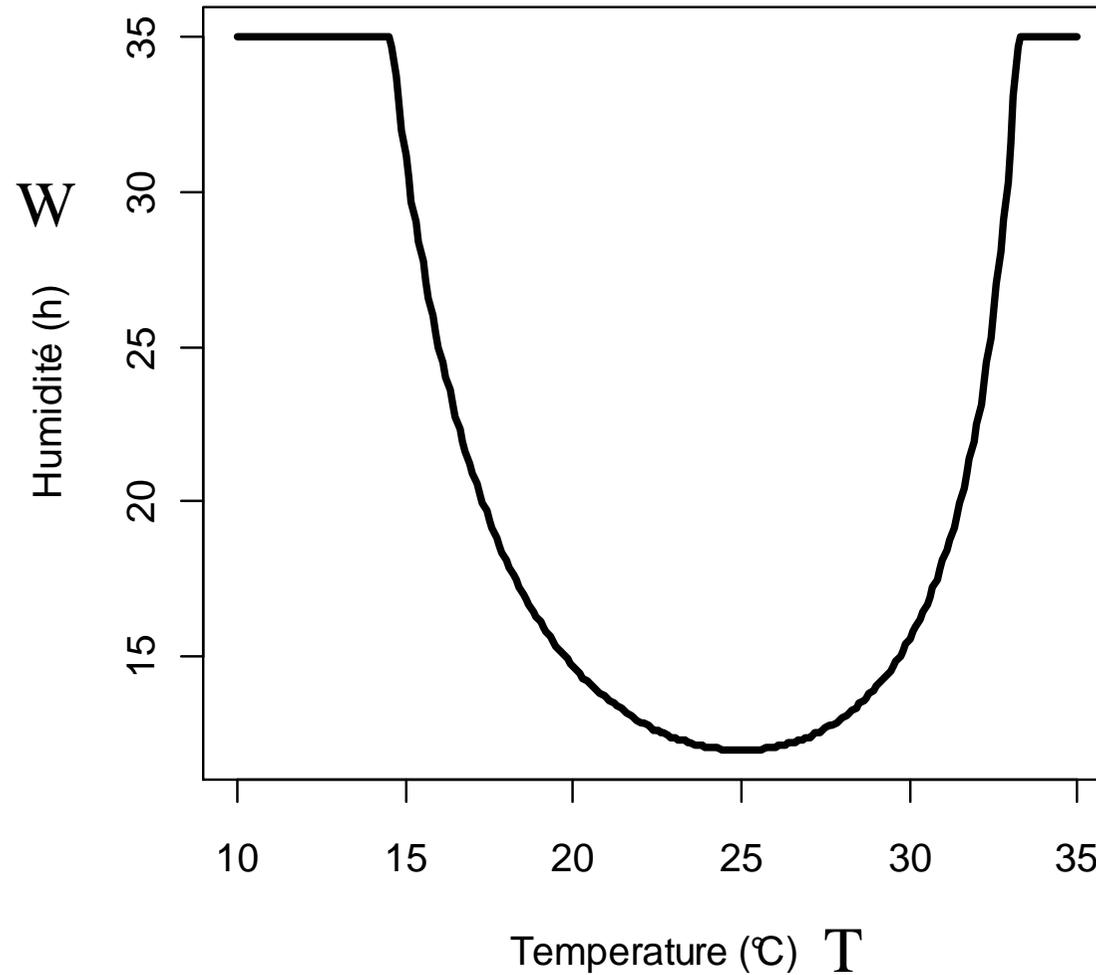
$$f(T) = \left( \frac{T_{\max} - T}{T_{\max} - T_{opt}} \right) \left( \frac{T - T_{\min}}{T_{opt} - T_{\min}} \right)^{(T_{opt} - T_{\min}) / (T_{\max} - T_{opt})}$$

Cinq paramètres :  $T_{\min}$ ,  $T_{opt}$ ,  $T_{\max}$ ,  $W_{\min}$ ,  $W_{\max}$

- **Les paramètres peuvent être estimés à partir de données et d'articles scientifiques pour différents champignons pathogènes**
- **Il reste des incertitudes sur ces paramètres**
- **Important**
  - **d'analyser l'incertitude induite par les paramètres sur  $W$**
  - **d'identifier les paramètres les plus influents afin de réaliser des expérimentations spécifiques**

**Exemple de valeurs estimées de paramètres pour les pycnidiospores de *Guignardia citricarpa* Kiely et valeurs simulées de W.**

**T<sub>min</sub>= 10 °C, T<sub>opt</sub>= 25 °C, T<sub>max</sub>=35 °C, W<sub>min</sub>=12 h, W<sub>max</sub>= 35 h**



## Incertitude sur les valeurs des paramètres (pycnidiospores de *Guignardia citricarpa* Kiely)

	Min	Max
Tmin (°C):	10	15
Tmax (°C):	32	35
Topt (°C):	25	30
Wmin (h):	12	14
Wmax (h):	35	48

Panel on Plant Health, EFSA (2008)

## Questions

- 1. Réaliser une analyse d'incertitude pour  $W$**
- 2. Réaliser une analyse de sensibilité sur  $W$**

# 1. Analyse d'incertitude pour $W$

- i. Définir les distributions des paramètres
- ii. Générer  $N$  séries de valeurs de paramètres ( $N=500$ )
- iii. Calculer  $W$  pour chaque série
- iv. Décrire la distribution de  $W$

## Une fonction R pour calculer W

```
Wetness <- function(T, Tmin, Topt, Tmax, Wmin, Wmax) {  
  fT <- ((Tmax-T)/(Tmax-Topt))*(((T-Tmin)/(Topt-Tmin))  
    ^((Topt-Tmin)/(Tmax-Topt)))  
  
  W <- Wmin/fT  
  W[W>Wmax] <- Wmax  
  return(W)  
}
```

T, T<sub>min</sub>, T<sub>opt</sub>, T<sub>max</sub>, W<sub>min</sub>, W<sub>max</sub>

---



**Wetness**



W

## Génération des valeurs des paramètres

```
Num <- 500
```

```
Tmin_vec <- runif(Num, 10, 15)
```

```
Topt_vec <- runif(Num, 25, 30)
```

```
Tmax_vec <- runif(Num, 32, 35)
```

```
Wmin_vec <- runif(Num, 12, 14)
```

```
Wmax_vec <- runif(Num, 35, 48)
```

## Simulation de W

```
T_vec <- seq(from=15, to=32, by=0.1)

W_mat <- matrix(nrow=Num, ncol=length(T_vec))

for (i in 1:Num) {

  W_mat[i,] <- Wetness(T_vec, Tmin_vec[i], Topt_vec[i],
                      Tmax_vec[i], Wmin_vec[i], Wmax_vec[i])

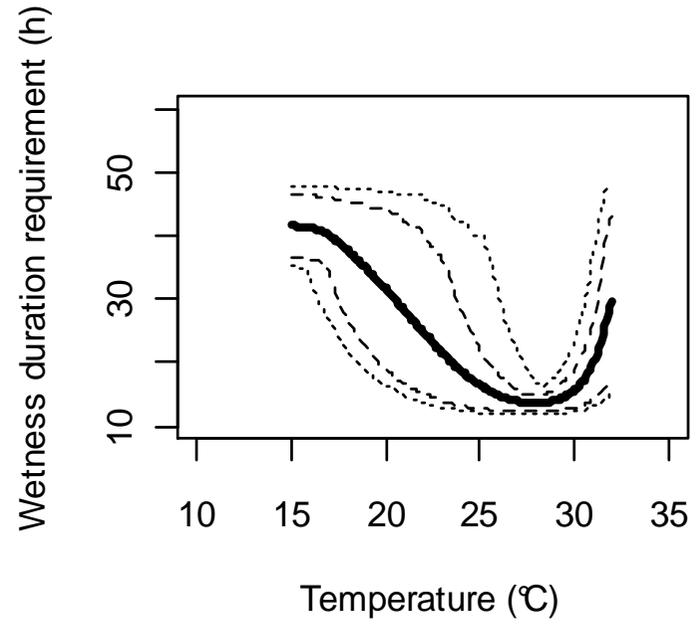
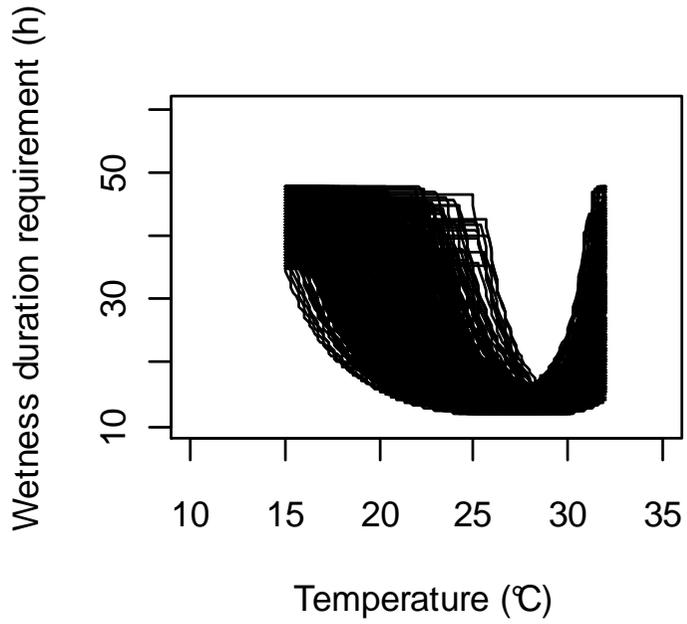
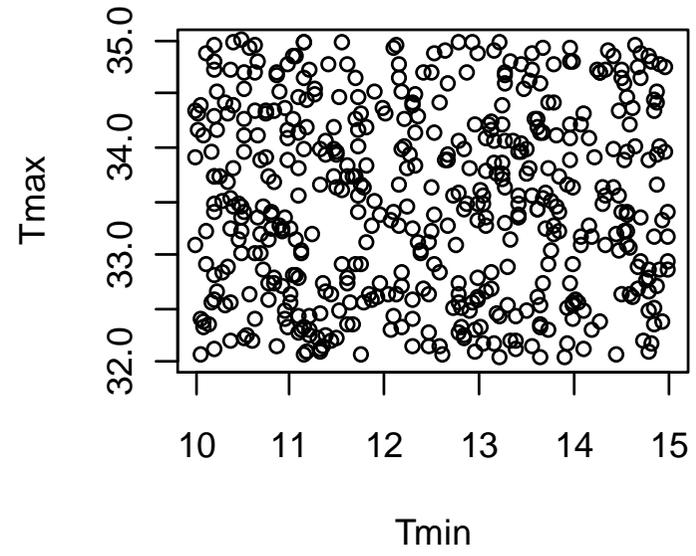
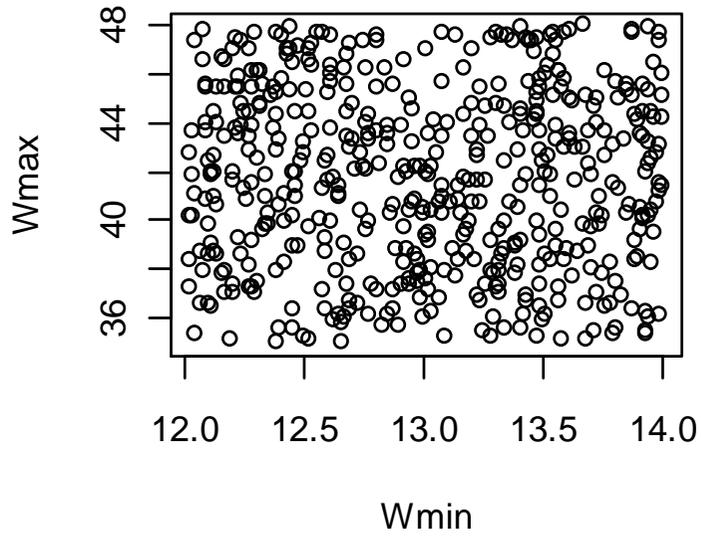
  lines(T_vec, W_mat[i,])

}
```

## Analyse des sorties

```
mean_vec <- apply(W_mat, 2, mean)
Q0.01_vec <- apply(W_mat, 2, quantile, 0.01)
Q0.1_vec <- apply(W_mat, 2, quantile, 0.1)
Q0.9_vec <- apply(W_mat, 2, quantile, 0.9)
Q0.99_vec <- apply(W_mat, 2, quantile, 0.99)

plot(c(0), c(0), pch=" ", xlab="Temperature (°C)",
     ylab="Wetness duration requirement (h)", xlim=c(10, 35),
     ylim=c(10, 60))
lines(T_vec, mean_vec, lwd=3)
lines(T_vec, Q0.9_vec, lty=2)
lines(T_vec, Q0.1_vec, lty=2)
lines(T_vec, Q0.99_vec, lty=9)
lines(T_vec, Q0.01_vec, lty=9)
```



## 2. Analyse de sensibilité pour $W$ par ANOVA

- i. Définir un plan d'expérience (plan fact. complet avec trois valeurs par paramètre)
- ii. Générer toutes les combinaisons possibles
- iii. Calculer  $W$  pour chaque combinaison
- iv. Réaliser une ANOVA et calculer les indices de sensibilité

## Plan d'expérience

# Tableau incluant 243 valeurs de paramètres

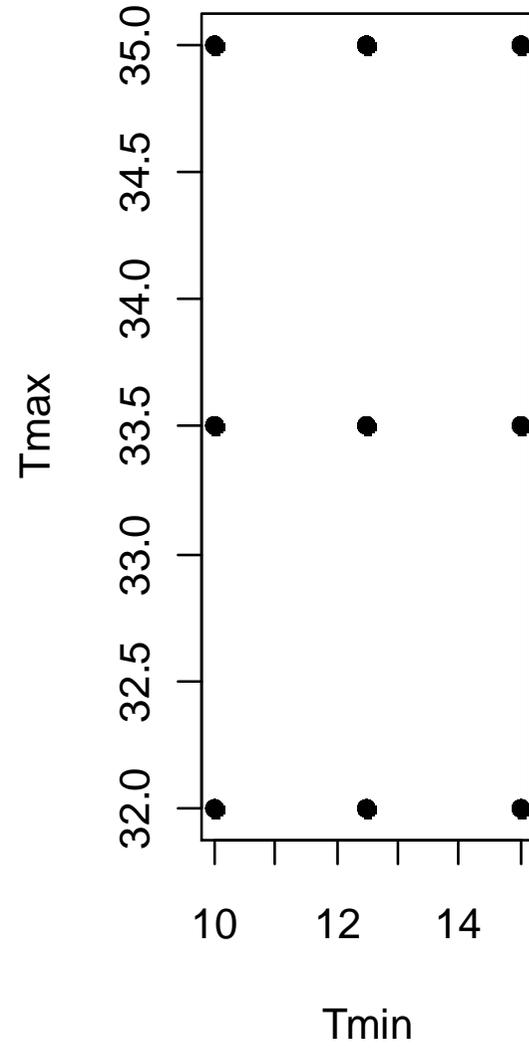
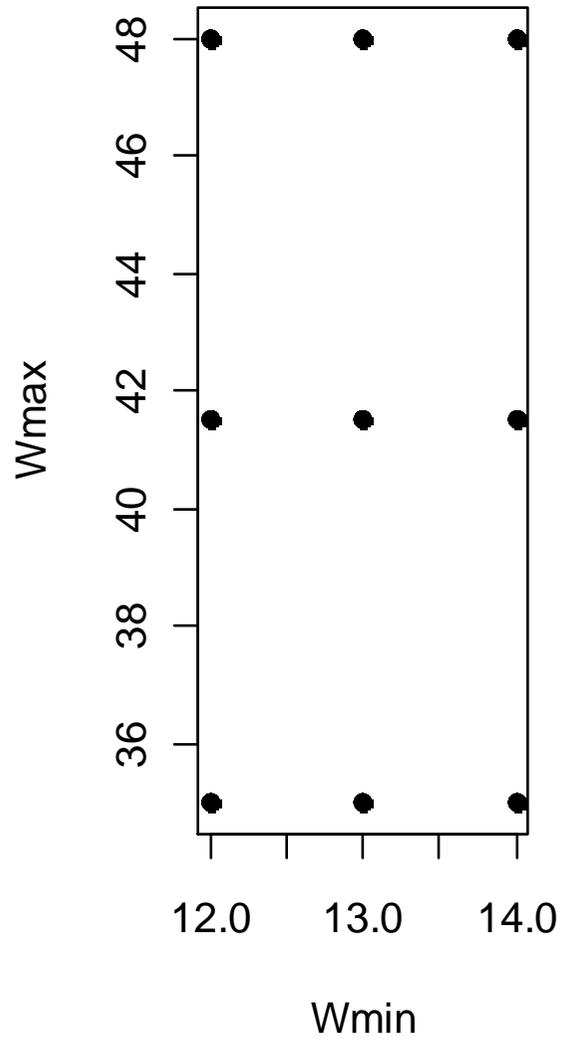
```
para.mat <- expand.grid(Tmin=c(10, 12.5, 15), Topt=c(25, 27.5,  
30), Tmax=c(32, 33.5, 35), Wmin=c(12, 13, 14), Wmax=c(35, 41.5, 48))  
print(para.mat)
```

```
plot(para.mat$Wmin, para.mat$Wmax, pch=19)  
plot(para.mat$Tmin, para.mat$Tmax, pch=19)
```

	Tmin	Topt	Tmax	Wmin	Wmax
1	10.0	25.0	32.0	12	35.0
2	12.5	25.0	32.0	12	35.0
3	15.0	25.0	32.0	12	35.0
4	10.0	27.5	32.0	12	35.0
5	12.5	27.5	32.0	12	35.0
6	15.0	27.5	32.0	12	35.0
7	10.0	30.0	32.0	12	35.0
8	12.5	30.0	32.0	12	35.0
9	15.0	30.0	32.0	12	35.0
10	10.0	25.0	33.5	12	35.0
11	12.5	25.0	33.5	12	35.0
12	15.0	25.0	33.5	12	35.0

.....

243



# Calcul de W pour chaque combinaison

```
# Temperature values
```

```
T.vec <- c(20, 25, 30)
```

```
# Create an empty matrix to store the simulated values
```

```
W.Mat <- matrix(nrow=243, ncol=3)
```

```
# Loop for simulating W
```

```
for (i in 1:243) {
```

```
W.mat[i,] <- Wetness(T.vec, para.mat$Tmin[i], para.mat$Topt[i],  
para.mat$Tmax[i], para.mat$Wmin[i], para.mat$Wmax[i])
```

```
}
```

# Indices de sensibilité

```
#Define the sets of parameter values as factors
```

```
Tmin <- as.factor(para.mat$Tmin)
```

```
Topt <- as.factor(para.mat$Topt)
```

```
Tmax <- as.factor(para.mat$Tmax)
```

```
Wmin <- as.factor(para.mat$Wmin)
```

```
Wmax <- as.factor(para.mat$Wmax)
```

```
#Select the simulations obtained for T=30
```

```
W <- W.mat[,3]
```

```
#Create a table
```

```
TAB <- data.frame(W, Tmin, Topt, Tmax, Wmin, Wmax)
```

```
#ANOVA (sum of squared associated with main effects and interactions)
```

```
Fit <- summary(aov(W~Tmin*Topt*Tmax*Wmin*Wmax, data=TAB))  
print(Fit)
```

```
#Computation of sensitivity indices
```

```
SumSq <- Fit[[1]][,2]
```

```
Total <- 242*var(W)
```

```
Indices <- 100*SumSq/Total
```

```
print(Indices)
```

```
TabIndices <- cbind(Fit[[1]],Indices)
```

```
print(TabIndices)
```

```
TabIndices <- TabIndices[order(Indices, decreasing=T),]
```

```
print(TabIndices)
```

```
> print(TabIndices)
```

	Sum Sq	Mean Sq	Indices
Topt	2.315226e+03	1.157613e+03	6.362759e+01
Tmax	5.907681e+02	2.953841e+02	1.623563e+01
Topt:Tmax	4.555308e+02	1.138827e+02	1.251901e+01
Wmin	2.570847e+02	1.285423e+02	7.065261e+00
Topt:Wmin	9.133042e+00	2.283260e+00	2.509964e-01
Tmin:Topt	3.191415e+00	7.978539e-01	8.770723e-02
Tmin	3.029813e+00	1.514906e+00	8.326603e-02
Tmax:Wmin	2.330446e+00	5.826115e-01	6.404587e-02

Copyrights MEXICO 2010 ©

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

see <http://www.gnu.org/licenses/fdl.html>