Applications en AgroBioSciences

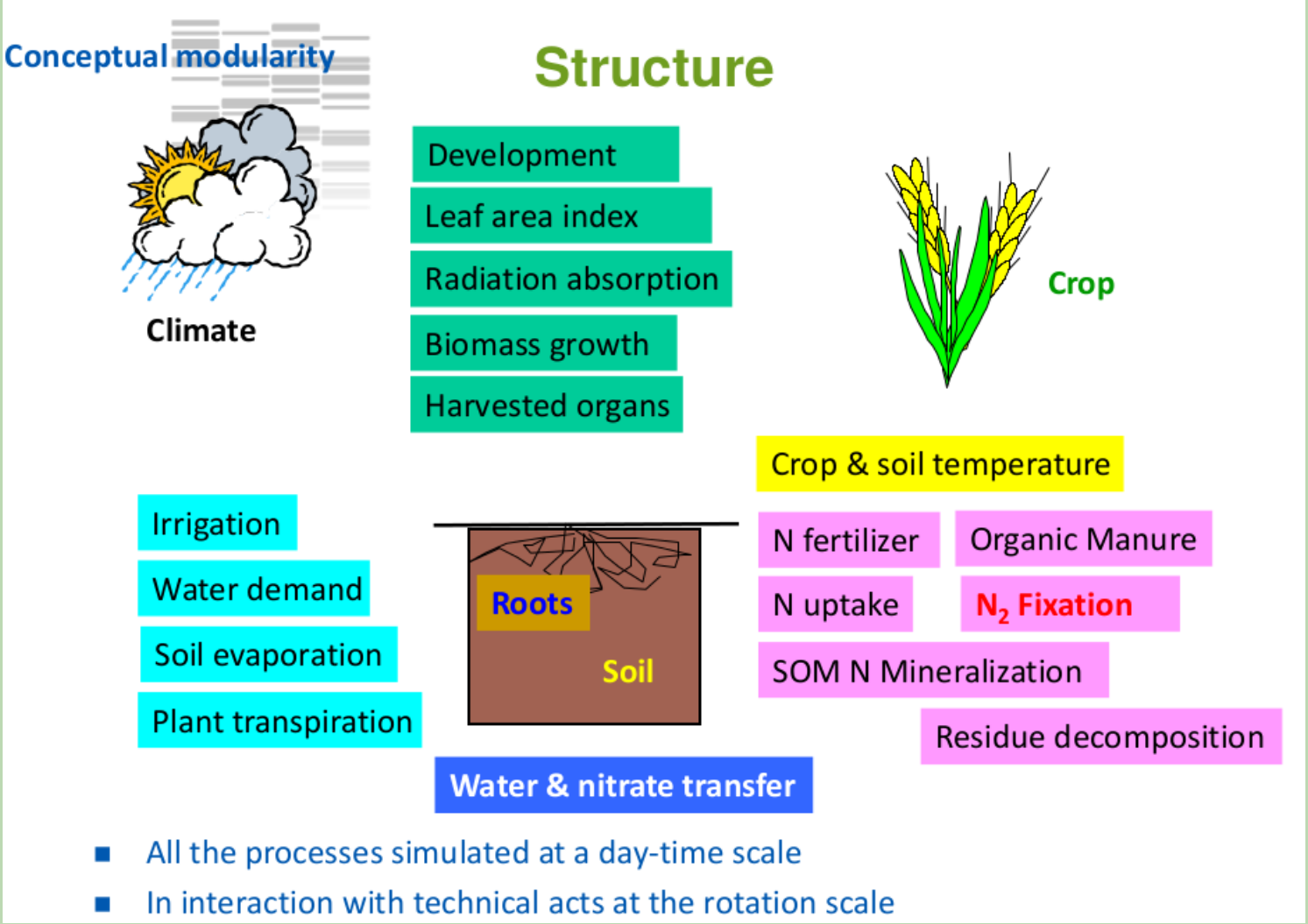
Robert Faivre

INRA - Mathématiques et Informatique Appliquées - Toulouse

École Centrale de Lyon, 18 mai 2015

Quelques types de modèles utilisés en AgroBioSciences

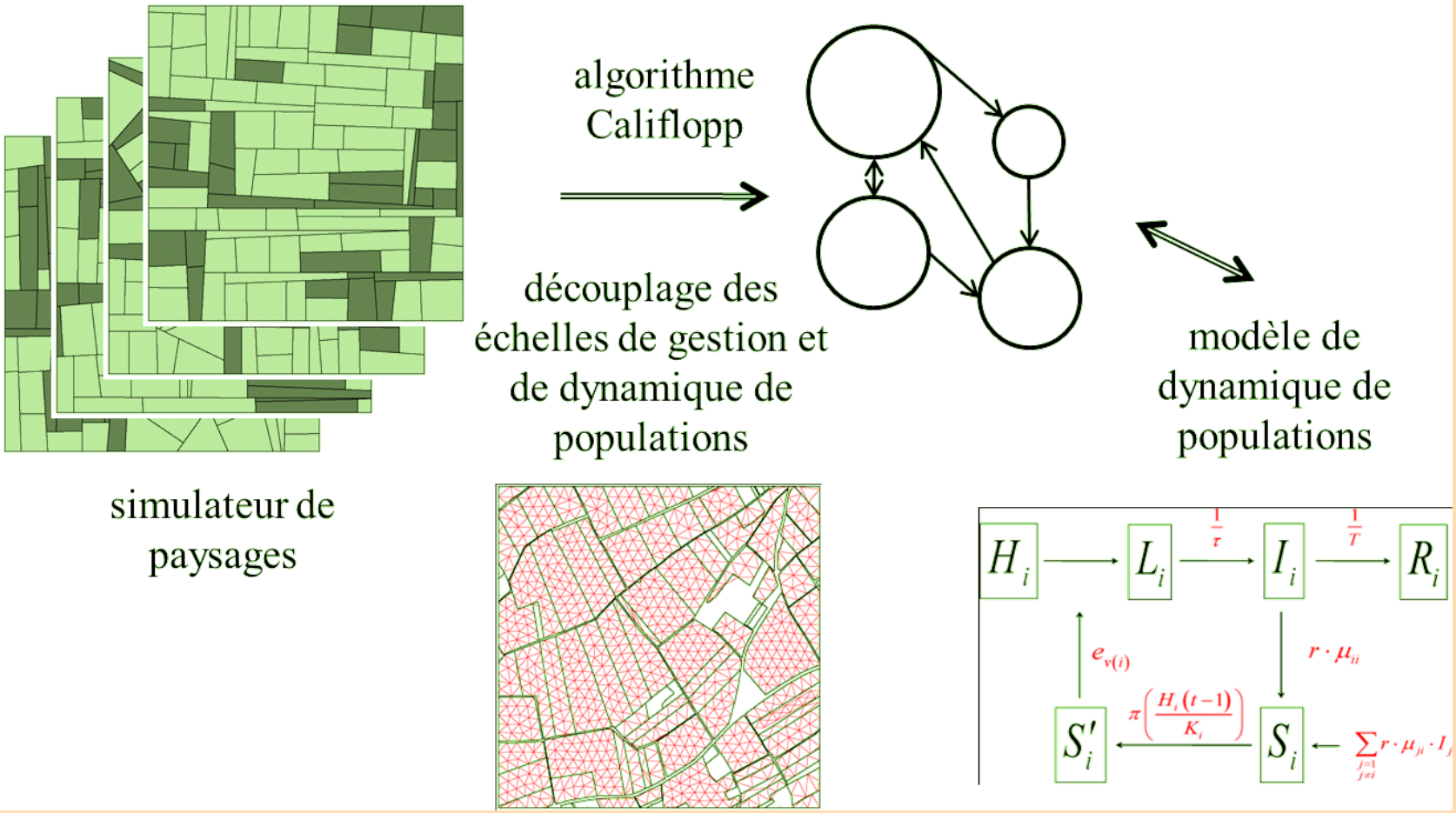
Modèles de culture



- STICS - Simulateur multidisciplinaire pour les cultures standard

Quelques types de modèles en AgroBioSciences

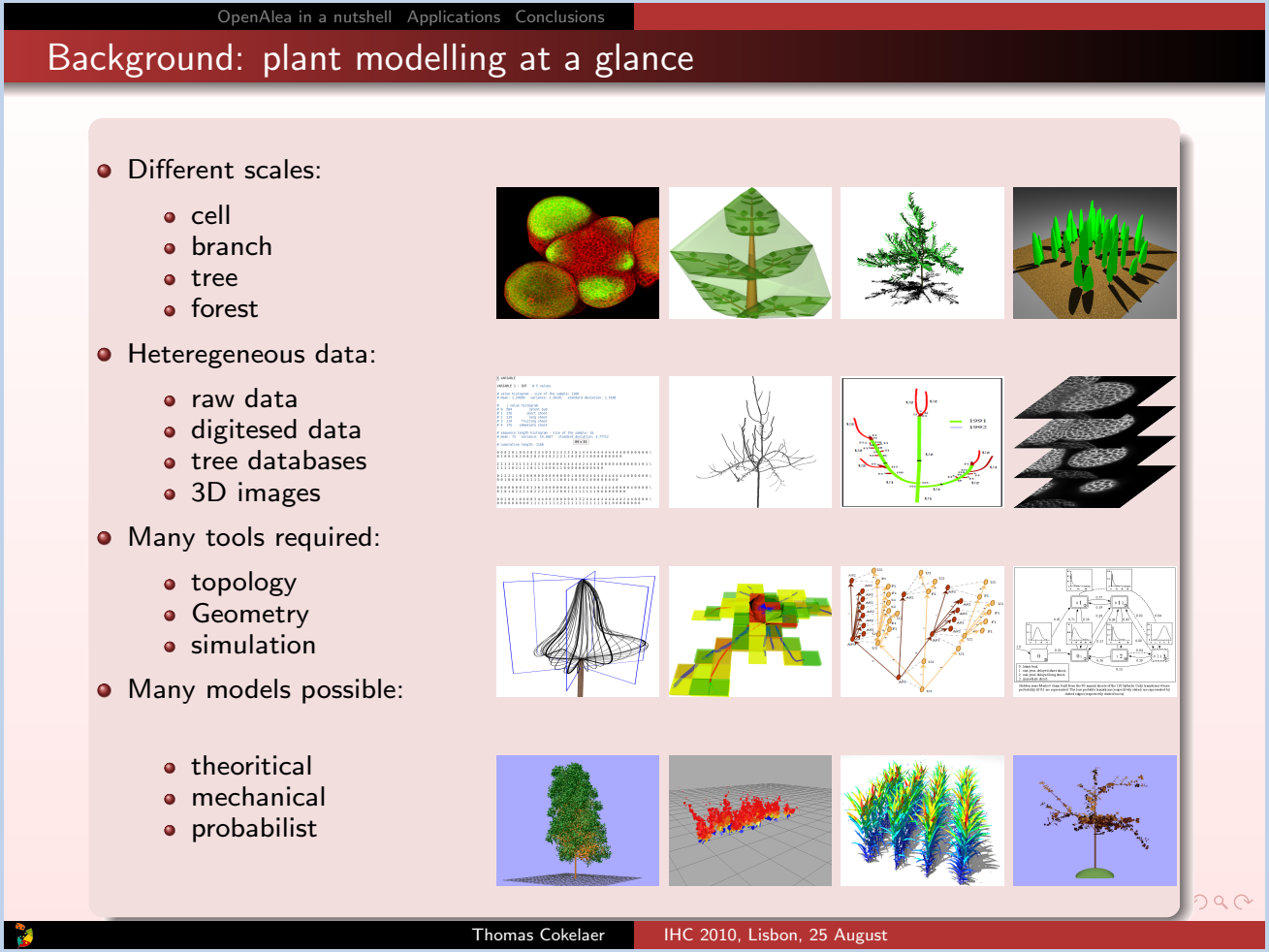
Modèles épidémiologiques sur paysage



- CaliFloPP - Calculation of the Integrated Flow of Particles between Polygons (Adamczyk et al.)

Quelques types de modèles en AgroBioSciences

Modèles structure-fonction d'architecture de plantes



- OpenAlea - Software Environment for Plant Modeling

Spécificités des modèles en AgroBioSciences

- Un grand nombre de processus donc de paramètres (Stics ≈ 400), certains corrélés
- Des processus dynamiques (équations différentielles ou aux différences) ou spatiaux
- Des entrées temporelles (météo par exemple) ou spatiales (paysage)
- Des pratiques culturales adaptatives (optimisées parfois)
- Des fonctions à seuil (stress, phénologie)
- Des processus parfois stochastiques (diffusion de spores, position/orientation d'organes)
- Temps de calcul modèle-dépendant ($< 1s$ à $1h$ voire plus)
- Un grand nombre de variables de sortie

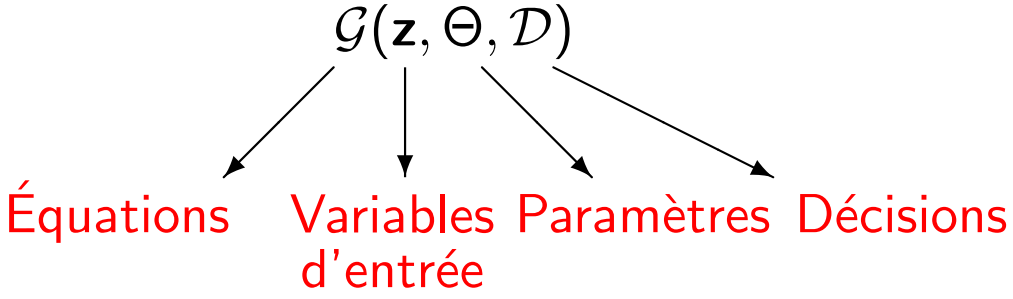
Grandes questions

- Estimation - Calibration des paramètres (optimisation)
- Qualité prédictive (analyse d'incertitude)
- Simplification du modèle (analyse de sensibilité, criblage, métamodélisation)
- Conception de pratiques (optimisation)
- Couplage de modèles (sensibilité, criblage)

Principes des analyses d'incertitude et de sensibilité

Définition et Objectifs

- Sources d'incertitude dans un modèle



- Types d'incertitude
  - Manque de connaissance
    ex: équation identifiée empiriquement sur un jeu de données
  - Variabilité de l'environnement du système
    ex: " température moyenne journalière " variable entre années
  - Imprécision
    ex: paramètre de croissance estimé sur un jeu de données
  - Règle de décision mal maîtrisée
    ex: seuil de déclanchement de l'irrigation

Principes des analyses d'incertitude et de sensibilité

Notations

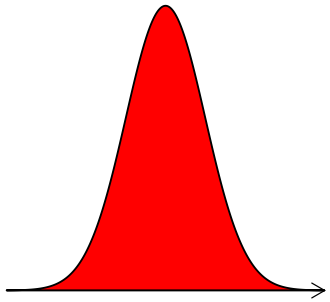
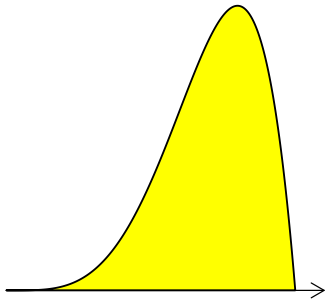
$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathcal{G}(\mathbf{x}) \\ &= \mathcal{G}(x_1, ..., x_K) \end{aligned}$$

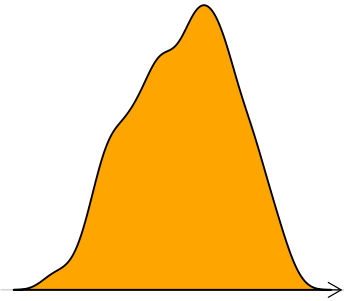
- $x_1, ..., x_K$ = variables d'entrée et paramètres incertains
- $x_1, ..., x_K$ les K facteurs incertains
- $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_K) \in \mathbb{R}^K$
- $\mathbf{y}$ peut être multidimensionnel

Principes de l'analyse d'incertitude

Objectif

- Répondre à la question suivante
  - Quel est le niveau d'incertitude de $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ qui résulte de l'incertitude dans les x_k ?

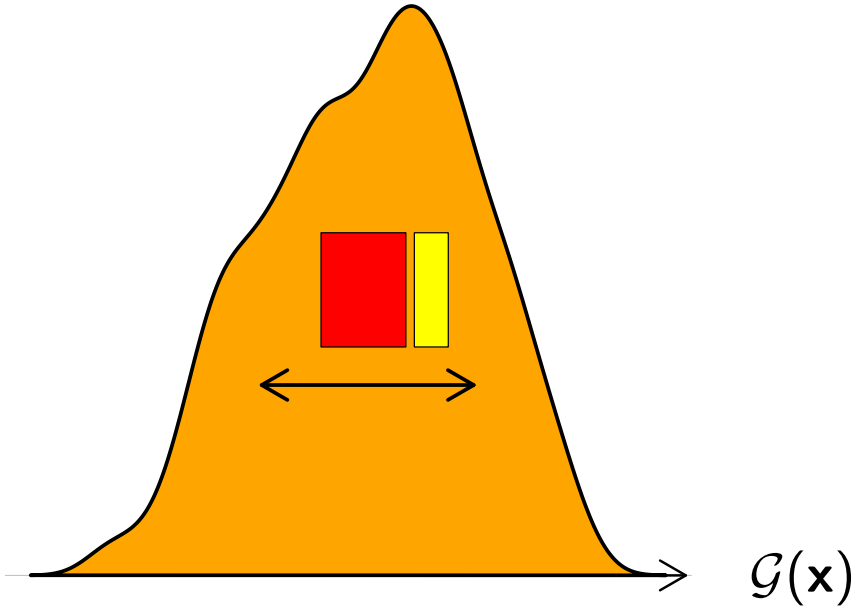
On a  x_1 et  x_2

On veut déterminer  $\mathcal{G}(\mathbf{x})$

Principes de l'analyse de sensibilité

Objectif

- Répondre à la question
  - Quelles sont les principales sources d'incertitude parmi $x_1, \cdots, x_K$ qui influencent $\mathcal{G}(\mathbf{x})$?



Variance de $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ = Effet de x_1 + Effet de x_2 + ...

Intérêts pratiques

Analyse d'incertitude

- donner des informations sur l'incertitude associée aux prédictions d'un modèle
- optimiser des variables décisionnelles pour réduire l'incertitude

Analyse de sensibilité

- identifier les paramètres et les variables d'entrée qui ont une forte influence sur les sorties d'un modèle
  $\rightarrow$ Important de les connaître avec précision
- identifier les paramètres et les variables d'entrée qui ont une influence moindre sur les sorties
  $\rightarrow$ Moins important de les connaître avec précision
- analyser le comportement du modèle

1. Analyse d'incertitude

Analyse d'incertitude

Un exemple très simple

- Équation : $\mathcal{G}(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$
- Incertitude sur x_1 et x_2 : $x_1 \sim \mathcal{N}(20, 16)$ et $x_2 \sim \mathcal{N}(60, 64)$

Si X_1 et X_2 sont deux variables indépendantes de distribution Gaussienne alors $\alpha X_1 + \beta X_2$ suit une distribution Gaussienne

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\alpha \mathrm{X}_1 + \beta \mathrm{X}_2) &= \alpha \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) + \beta \mathrm{E}(\mathrm{X}_2) \\ \mathrm{Var}(\alpha \mathrm{X}_1 + \beta \mathrm{X}_2) &= \alpha^2 \mathrm{Var}(\mathrm{X}_1) + \beta^2 \mathrm{Var}(\mathrm{X}_2) \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}(x_1, x_2) \sim \mathcal{N}(140, 272)$$

Analyse d'incertitude

En général, c'est plus dur !

- Equations plus complexes, relation non linéaire entre $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}$
  $\rightarrow$ Impossible de déterminer l'expression analytique de la distribution de $\mathcal{G}(\mathbf{x})$
- La distribution de $\mathbf{x}$ n'est pas toujours connue
  $\rightarrow$ Choix subjectif
- Temps de calcul parfois long avec certains modèles
  $\rightarrow$ Le nombre de simulations peut être limitant

Analyse d'incertitude

Procédure en quatre étapes

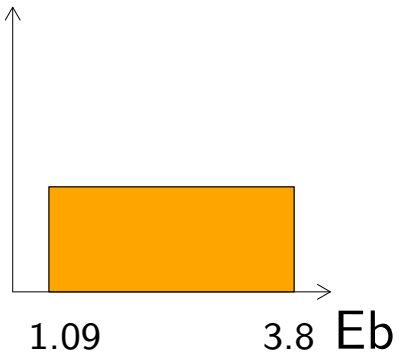
1. Définir les distributions de $x_1, \cdots, x_K$
2. Générer des échantillons à partir des distributions définies à l'étape 1
3. Calculer $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ pour chaque série de $x_1, \cdots, x_K$ générée
4. Estimer la distribution de $\mathcal{G}(\mathbf{x})$

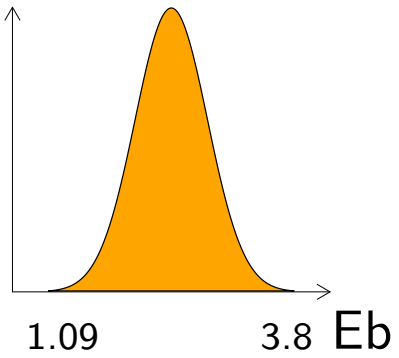
Étape 1 - Définition des distributions

Les distributions de probabilité des facteurs incertains (paramètres ou variables d'entrée) peuvent être définies en utilisant :

- La littérature scientifique et l'expertise
- Des séries de mesures (série climatique ...)
- Les valeurs des paramètres estimées

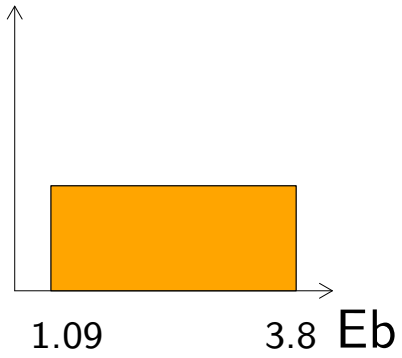
Exemple : d'après un article publié par Jeuffroy et Recous en 1999 dans EJA, l'efficacité d'utilisation de rayonnement intercepté varie entre 1.09 et 3.8 g.MJ-1 pour le blé



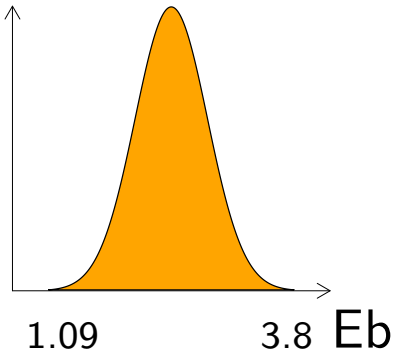


Étape 2 - Génération d'échantillons à partir des distributions de $x_1, x_2, \cdots, x_K$

- Il faut générer suffisamment de valeurs de $x_1, x_2, \cdots, x_K$
- Différentes méthodes d'échantillonnage peuvent être utilisées : échantillonnage aléatoire (Monte Carlo), échantillonnage en hypercube latin, ...
- En pratique, on utilise un logiciel pour générer N valeurs de $x_1, x_2, \cdots, x_K$ (ex: $N = 20000$).



1.26 3.36 1.90 1.18 1.47
2.05 2.44 1.30 2.86 2.48



1.83 2.23 2.01 2.44 2.60
2.66 1.71 2.71 2.20 2.80

Analyse d'incertitude

Étape 3 - Calcul de $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ pour chaque série $x_1, x_2, \cdots, x_K$ générée

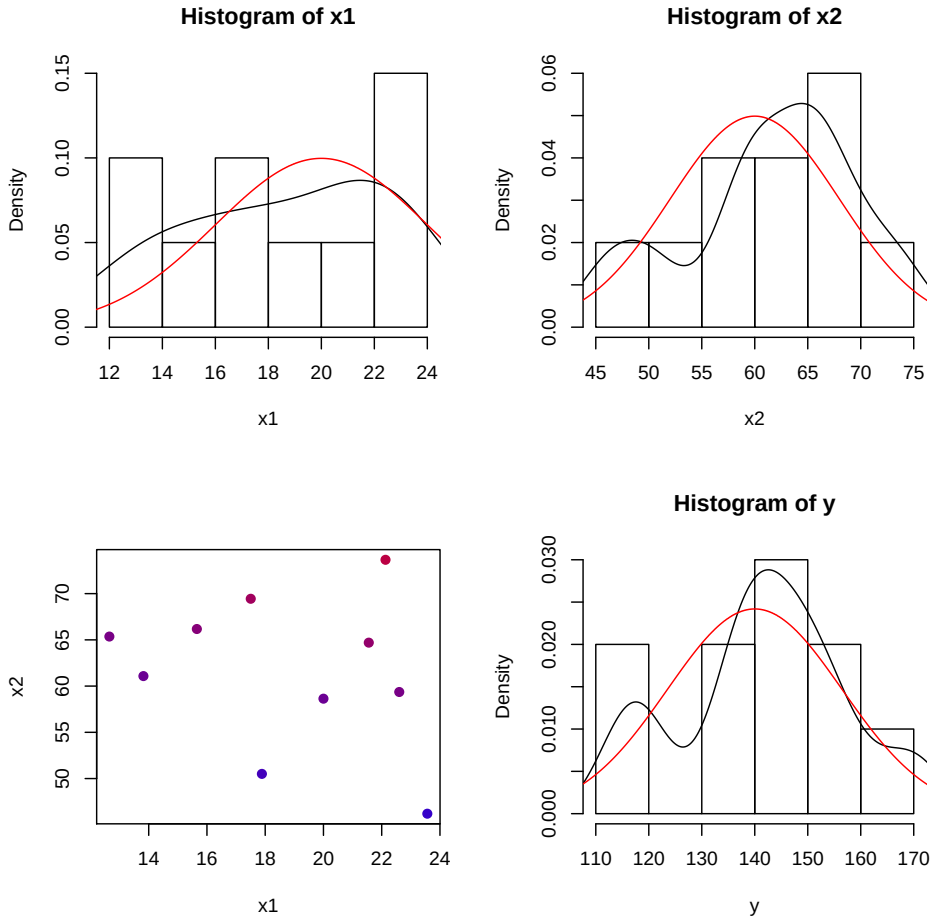
- Exécuter le modèle N fois, pour toutes les valeurs générées des facteurs d'entrée $x_1, x_2, \cdots, x_K$

Étape 4 - Approximation de la distribution de $\mathcal{G}(\mathbf{x})$

- Décrire les N valeurs de $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ calculées à l'étape 3
- Différentes approches possibles
  - calcul de la moyenne et de la variance,
  - calcul de quantiles (quartiles, déciles, ...),
  - histogramme,
  - fonction de distribution cumulée,
  - box plot...

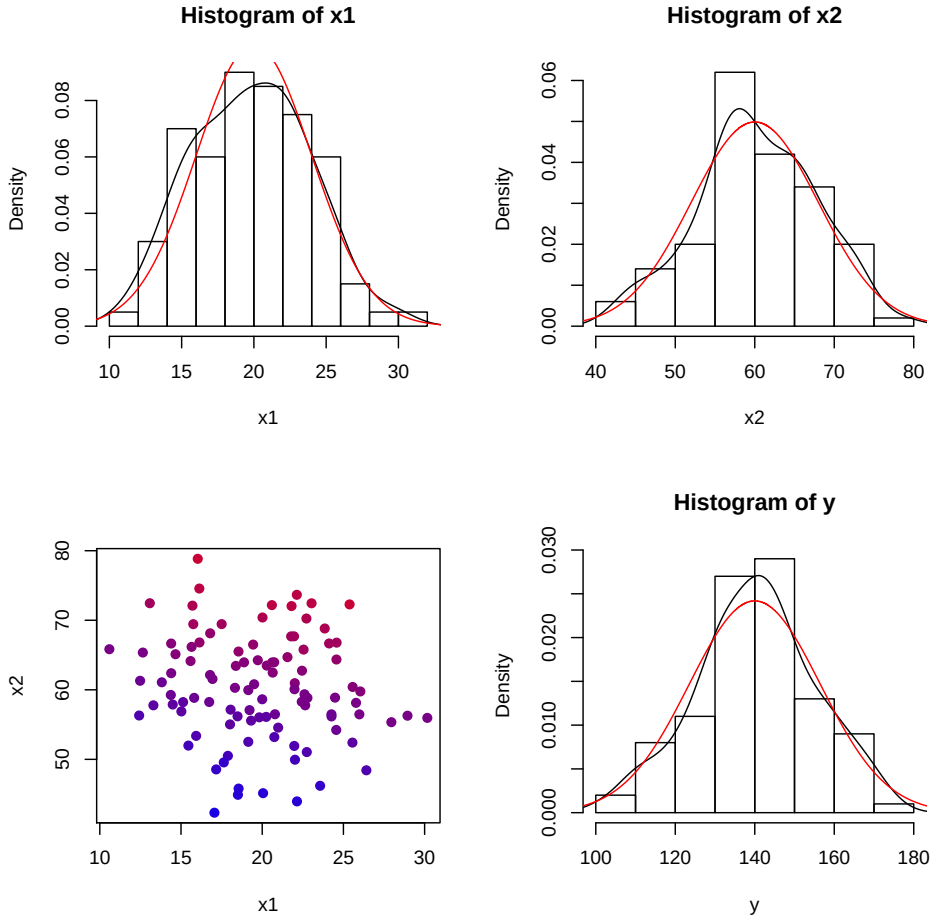
Application au modèle simple

- N = 10



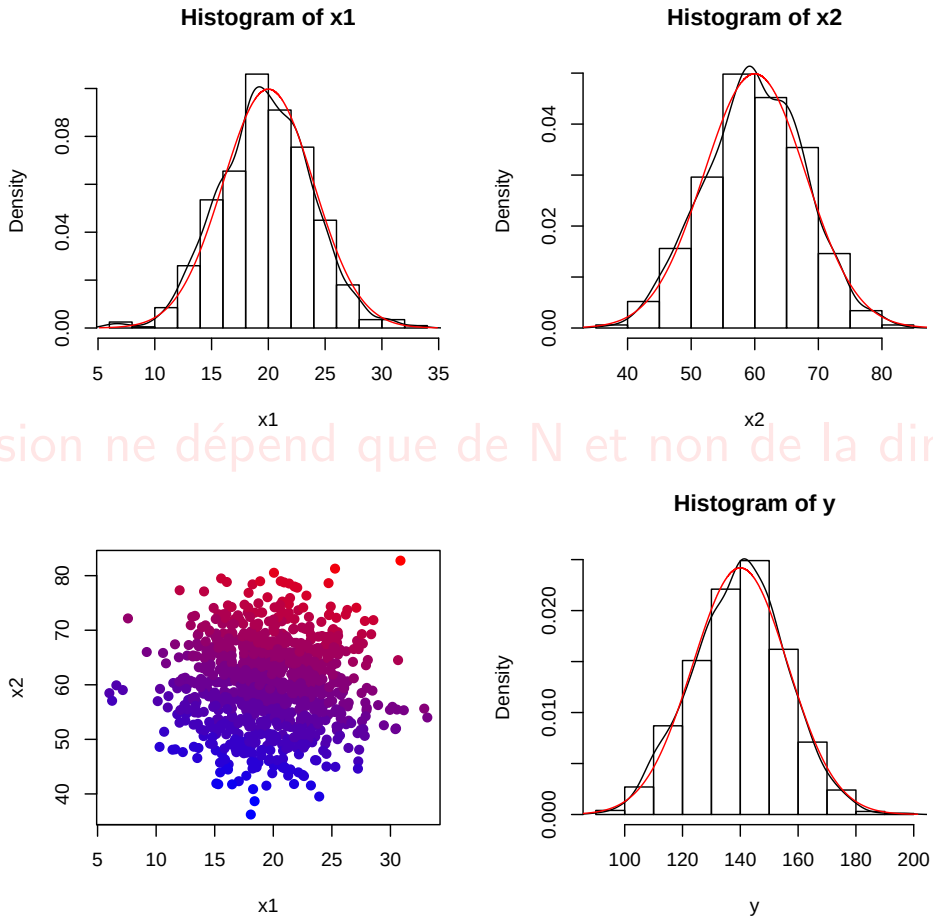
Application au modèle simple

- N = 100



Application au modèle simple

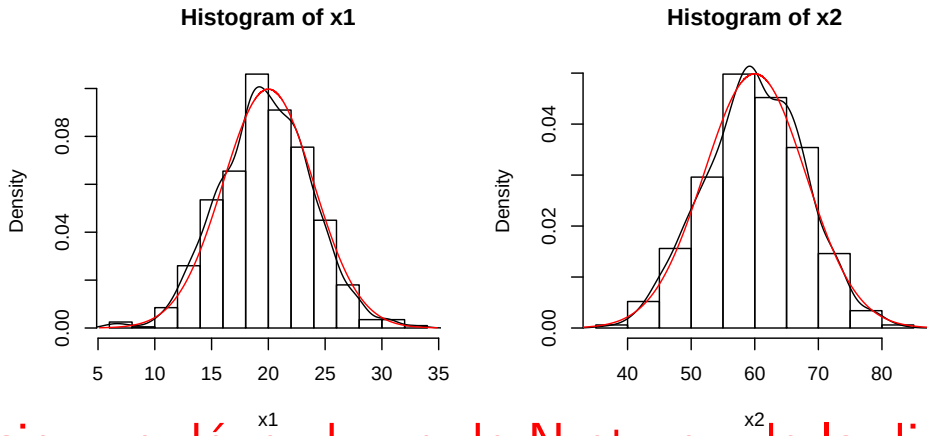
- N = 1000



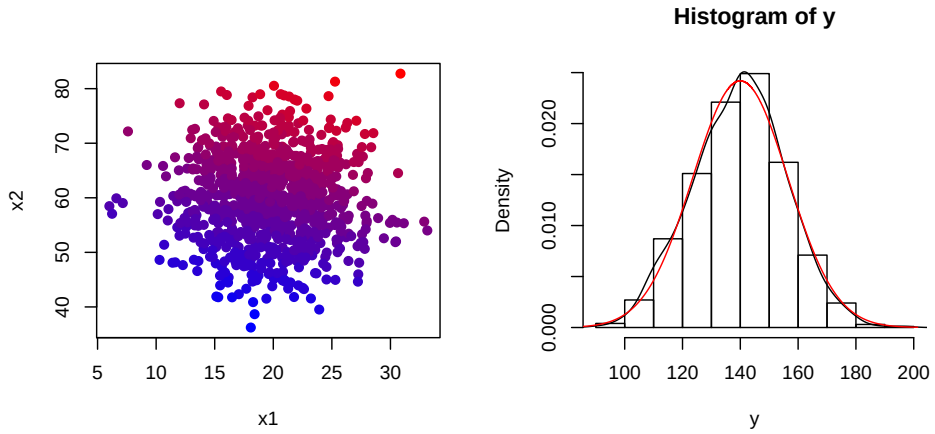
La précision ne dépend que de N et non de la dimension K

Application au modèle simple

- N = 1000



La précision ne dépend que de N et non de la dimension K



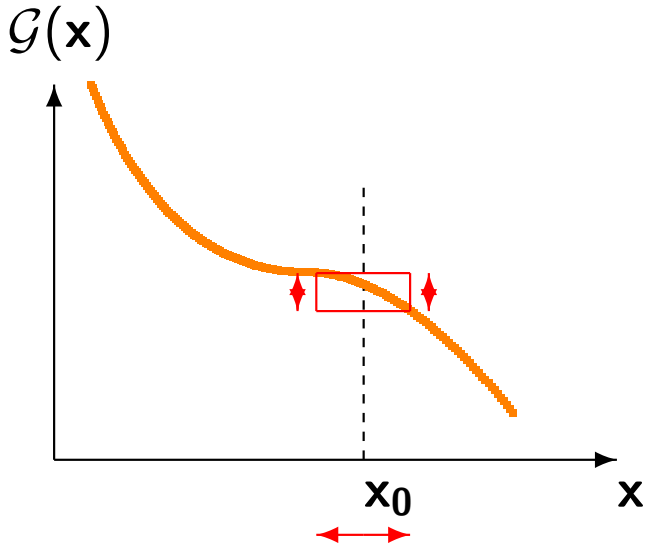
2. Analyse de sensibilité

Analyse de sensibilité

Question

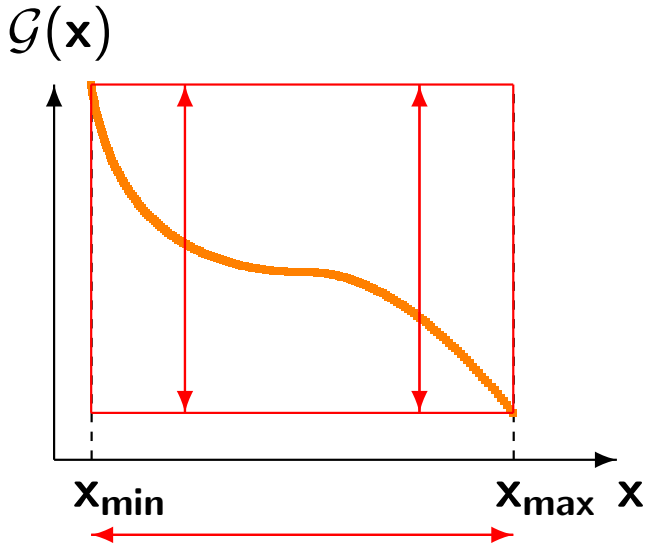
- Quelles sont les principales sources de variation qui influencent $\mathcal{G}(\mathbf{x})$?

Analyse de sensibilité locale
Variation de $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ autour de $\mathbf{x_0}$



basée sur le calcul de dérivées

Analyse de sensibilité globale
Variation globale de $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ quand $\mathbf{x}$ varie dans son domaine d'incertitude



basée sur le calcul d'indices

Analyse de sensibilité globale

Elle consiste à

- Définir des indices de sensibilité
- Calculer ces indices en faisant varier les facteurs incertains $x_1, \cdots, x_K$ sur leurs domaines

Procédure en quatre étapes

1. Définir les distributions de $x_1, \cdots, x_K$
2. Générer des échantillons à partir des distributions définies à l'étape 1
3. Calculer $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ pour chaque série de $x_1, \cdots, x_K$ générée
4. Calculer les indices de sensibilité

Analyse de sensibilité globale

Indices basés sur une décomposition de la variance

$$Var[\mathcal{G}(\mathbf{x})] = \underbrace{Var_{x_1} + Var_{x_2} + Var_{x_3} + \dots}_{\downarrow} + \underbrace{Var_{x_1.x_2} + Var_{x_1.x_3} + \dots}_{\downarrow}$$

$\downarrow$ Variance totale de la variable de sortie

$\downarrow$ Effets principaux des facteurs incertains

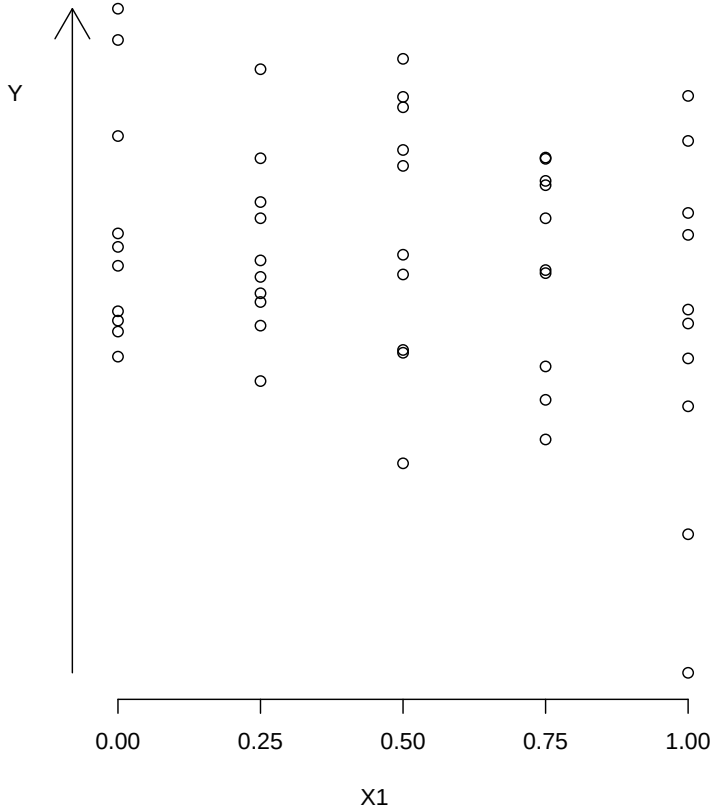
$\downarrow$ Termes d'interactions

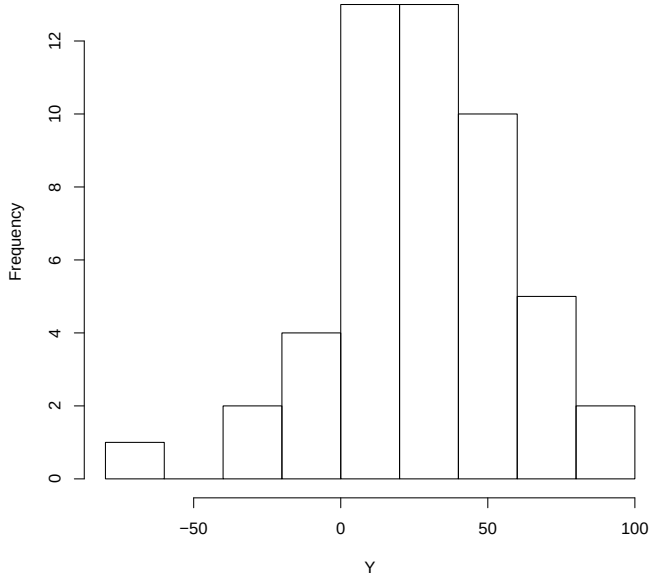
Indice de premier ordre de x_1 $(\mathrm{SI}_1) = \dfrac{Var_{x_1}}{Var[\mathcal{G}(\mathbf{x})]}$

Indice de sensibilité totale de x_i $(\mathrm{TSI}_1) = \dfrac{Var_{x_1} + Var_{x_1.x_2} + Var_{x_1.x_3} + \dots}{Var[\mathcal{G}(\mathbf{x})]}$

Principe de la décomposition de la variance

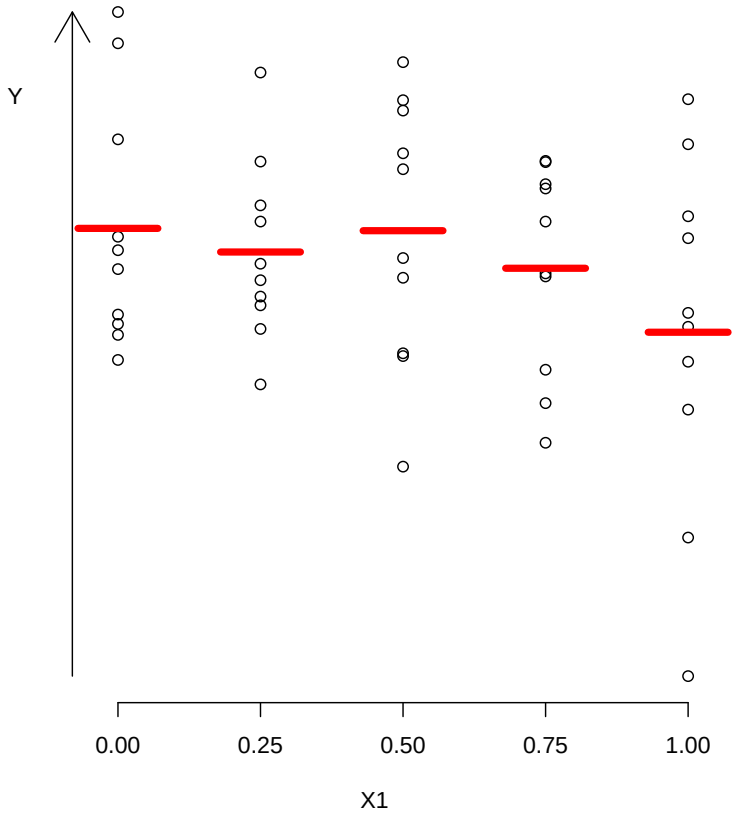
On dispose de mesures répétées sur 5 valeurs de x_1





Visualisation des indices

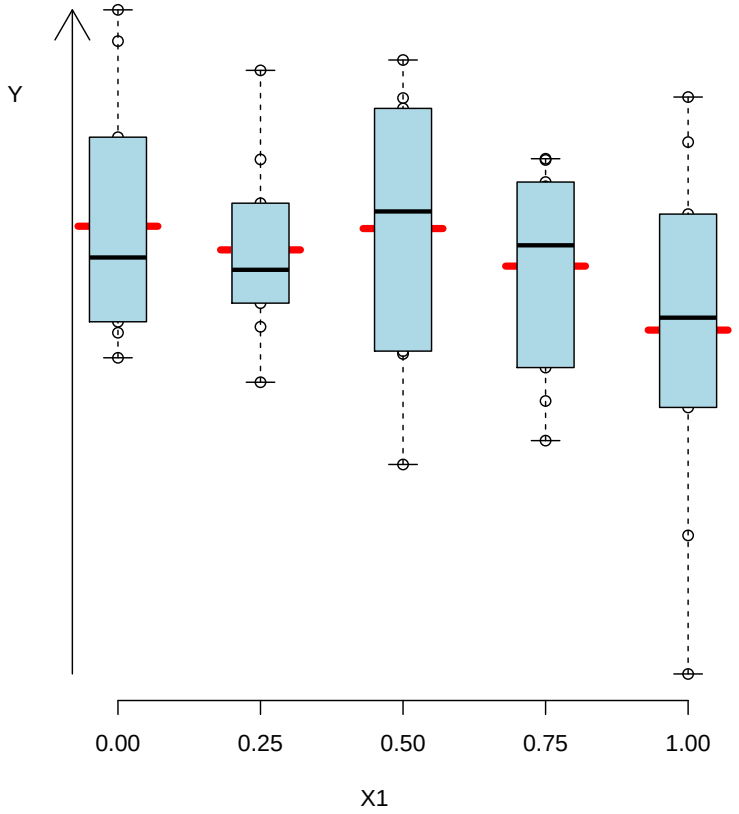
On calcule la variance des moyennes estimées sur les 5 points.



$$SI_1 = Var[Esp(\mathcal{G}(\mathbf{x})|x_i)]$$

Visualisation des indices

On calcule la moyenne des variances.



$Esp(Var(\mathcal{G}|x_i)])$

Théorème de la variance totale

$$Var[\mathcal{G}(\mathbf{x})] = Var[Esp(\mathcal{G}|x_i)] + Esp(Var(\mathcal{G}|x_i)])$$

Analyse de sensibilité globale

Autre formulation des indices

- $\mathrm{SI}_i = \dfrac{Var[Esp(\mathcal{G}(\mathbf{x})|x_i)]}{Var[\mathcal{G}(\mathbf{x})]}$
- $\mathrm{TSI}_i = \dfrac{Esp(Var[\mathcal{G}|\mathbf{x}^{(-i)}])}{Var[\mathcal{G}(\mathbf{x})]}$

Interprétation

- SI_i : pour chaque valeur du facteur x_i, on fait bouger les autres facteurs et on calcule les moyennes en chaque valeur. Ensuite, on regarde si la moyenne (espérance) bouge.
- TSI_i : pour tous les n-uplets de valeurs de tous les facteurs ($\mathbf{x}^{(-i)}$) sauf x_i, on fait bouger le facteur x_i et on calcule la variabilité. On en fait ensuite la moyenne.

$\longrightarrow$ Principe des méthodes d'analyse de variance sur plan factoriel ou des méthodes dites de Sobol' par échantillonnage alternatif, méthodes nécessitant beaucoup d'évaluation du modèle.

Analyse de sensibilité globale

Autre formulation des indices

- $\mathrm{SI}_i = \dfrac{Var[Esp(\mathcal{G}(\mathbf{x})|x_i)]}{Var[\mathcal{G}(\mathbf{x})]}$
- $\mathrm{TSI}_i = \dfrac{Esp(Var[\mathcal{G}|\mathbf{x}^{(-i)}])}{Var[\mathcal{G}(\mathbf{x})]}$

Interprétation

- SI_i : pour chaque valeur du facteur x_i, on fait bouger les autres facteurs et on calcule les moyennes en chaque valeur. Ensuite, on regarde si la moyenne (espérance) bouge.
- TSI_i : pour tous les n-uplets de valeurs de tous les facteurs ($\mathbf{x}^{(-i)}$) sauf x_i, on fait bouger le facteur x_i et on calcule la variabilité. On en fait ensuite la moyenne.

$\longrightarrow$ Principe des méthodes d'analyse de variance sur plan factoriel ou des méthodes dites de Sobol' par échantillonnage alternatif, méthodes nécessitant beaucoup d'évaluation du modèle.

Analyse de sensibilité globale

Méthode par plan factoriel complet

- chaque facteur est décomposé en un certain nombre de niveaux
- plan factoriel complet : croisement de tous les niveaux

- Prenons un modèle avec 20 paramètres (facteurs) incertains.
- Pour un plan factoriel complet de 20 facteurs à 3 niveaux, cela nécessite $3^{20} = 3\ 486\ 784\ 401$ évaluations du modèle.
- Si une évaluation prend environ 0.01 seconde, cela nécessite 581 130.7 heures de calcul.
- Avec une ferme de calcul de 1000 processeurs, cela représente environ 581 heures, soit 24.2 jours.
- Pour une puissance de 200 Watts par unité centrale, la consommation électrique correspond à 116 226.1 kWh, soit la consommation annuelle de 16 familles françaises environ et un coût est de 11.6 K€ (10 c. / kWh).

Une planification raisonnée, un enjeu pour le Développement Durable

Analyse de sensibilité globale

Méthode par plan factoriel complet

- chaque facteur est décomposé en un certain nombre de niveaux
- plan factoriel complet : croisement de tous les niveaux

- Prenons un modèle avec 20 paramètres (facteurs) incertains.
- Pour un plan factoriel complet de 20 facteurs à 3 niveaux, cela nécessite $3^{20} = 3\ 486\ 784\ 401$ évaluations du modèle.
- Si une évaluation prend environ 0.01 seconde, cela nécessite 581 130.7 heures de calcul.
- Avec une ferme de calcul de 1000 processeurs, cela représente environ 581 heures, soit 24.2 jours.
- Pour une puissance de 200 Watts par unité centrale, la consommation électrique correspond à 116 226.1 kWh, soit la consommation annuelle de 16 familles françaises environ et un coût est de 11.6 K€ (10 c. / kWh).

Une planification raisonnée, un enjeu pour le Développement Durable

Analyse de sensibilité globale

Méthode par plan factoriel complet

- chaque facteur est décomposé en un certain nombre de niveaux
- plan factoriel complet : croisement de tous les niveaux

- Prenons un modèle avec 20 paramètres (facteurs) incertains.
- Pour un plan factoriel complet de 20 facteurs à 3 niveaux, cela nécessite $3^{20} = 3\ 486\ 784\ 401$ évaluations du modèle.
- Si une évaluation prend environ 0.01 seconde, cela nécessite 581 130.7 heures de calcul.
- Avec une ferme de calcul de 1000 processeurs, cela représente environ 581 heures, soit 24.2 jours.
- Pour une puissance de 200 Watts par unité centrale, la consommation électrique correspond à 116 226.1 kWh, soit la consommation annuelle de 16 familles françaises environ et un coût est de 11.6 K€ (10 c. / kWh).

Une planification raisonnée, un enjeu pour le Développement Durable

Analyse de sensibilité globale

Méthode par plan factoriel complet

- chaque facteur est décomposé en un certain nombre de niveaux
- plan factoriel complet : croisement de tous les niveaux

- Prenons un modèle avec 20 paramètres (facteurs) incertains.
- Pour un plan factoriel complet de 20 facteurs à 3 niveaux, cela nécessite $3^{20} = 3\ 486\ 784\ 401$ évaluations du modèle.
- Si une évaluation prend environ 0.01 seconde, cela nécessite 581 130.7 heures de calcul.
- Avec une ferme de calcul de 1000 processeurs, cela représente environ 581 heures, soit 24.2 jours.
- Pour une puissance de 200 Watts par unité centrale, la consommation électrique correspond à 116 226.1 kWh, soit la consommation annuelle de 16 familles françaises environ et un coût est de 11.6 K€ (10 c. / kWh).

Une planification raisonnée, un enjeu pour le Développement Durable

Analyse de sensibilité globale

Méthode par plan factoriel complet

- chaque facteur est décomposé en un certain nombre de niveaux
- plan factoriel complet : croisement de tous les niveaux

- Prenons un modèle avec 20 paramètres (facteurs) incertains.
- Pour un plan factoriel complet de 20 facteurs à 3 niveaux, cela nécessite $3^{20} = 3\ 486\ 784\ 401$ évaluations du modèle.
- Si une évaluation prend environ 0.01 seconde, cela nécessite 581 130.7 heures de calcul.
- Avec une ferme de calcul de 1000 processeurs, cela représente environ 581 heures, soit 24.2 jours.
- Pour une puissance de 200 Watts par unité centrale, la consommation électrique correspond à 116 226.1 kWh, soit la consommation annuelle de 16 familles françaises environ et un coût est de 11.6 K€ (10 c. / kWh).

Une planification raisonnée, un enjeu pour le Développement Durable

Analyse de sensibilité globale

Méthode par plan factoriel complet

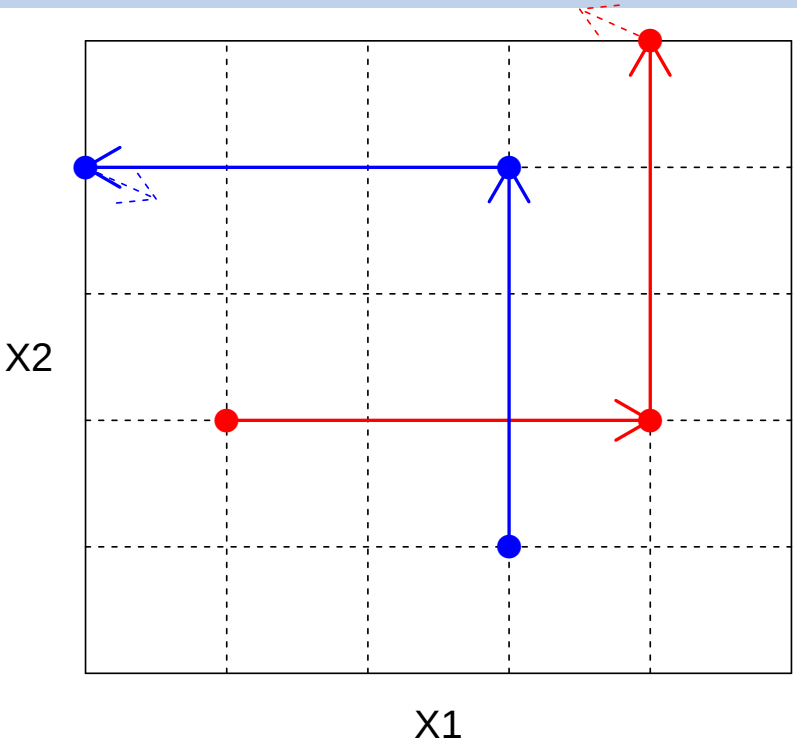
- chaque facteur est décomposé en un certain nombre de niveaux
- plan factoriel complet : croisement de tous les niveaux

- Prenons un modèle avec 20 paramètres (facteurs) incertains.
- Pour un plan factoriel complet de 20 facteurs à 3 niveaux, cela nécessite $3^{20} = 3\ 486\ 784\ 401$ évaluations du modèle.
- Si une évaluation prend environ 0.01 seconde, cela nécessite 581 130.7 heures de calcul.
- Avec une ferme de calcul de 1000 processeurs, cela représente environ 581 heures, soit 24.2 jours.
- Pour une puissance de 200 Watts par unité centrale, la consommation électrique correspond à 116 226.1 kWh, soit la consommation annuelle de 16 familles françaises environ et un coût est de 11.6 K€ (10 c. / kWh).

Une planification raisonnée, un enjeu pour le Développement Durable

Méthode de Morris

Une exploration astucienne de l'espace



Grands principes

- Discrétisation de l'espace
- Un déplacement sur un seul facteur à la fois (méthode OAT One At a Time)
- Un point de départ aléatoire
- Une trajectoire correspond à K déplacements (K+1 points)

Méthode de Morris

Analyse

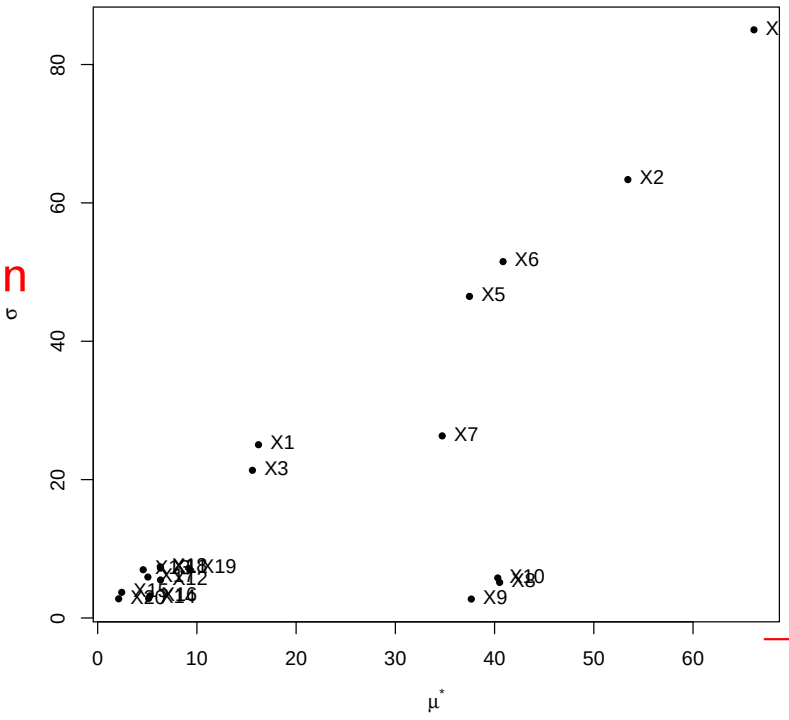
Mesures d'importance du facteur x_i évaluées sur R trajectoires T^r avec le segment $[\mathcal{G}(T^r_{(i-1)}), \mathcal{G}(T^r_{(i)})]$ correspondant au saut du facteur x_i

- effet élémentaire : $\Delta_i^r = \dfrac{\mathcal{G}(T^r_{(i-1)}) - \mathcal{G}(T^r_{(i)})}{\delta}$, δ la taille du saut
- effect moyen : $\mu_i = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} \Delta_i^r$
- effect absolu moyen : $\mu_i^* = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} \mid \Delta_i^r \mid$
- écart-type des effets élémentaires : $\sigma_i = \sqrt{\dfrac{1}{R-1}\sum_{r=1}^{R}(\Delta_i^r - \mu_i)^2}$

Méthode de Morris

Résultat du criblage sur la fonction morris, package sensitivity de R

Effet non linéaire et/ou en interaction



Effet principal linéaire

morris(model = morris.fun, factors = 20, r = 4, design = list(type = "oat", levels = 6, grid.jump = 3))

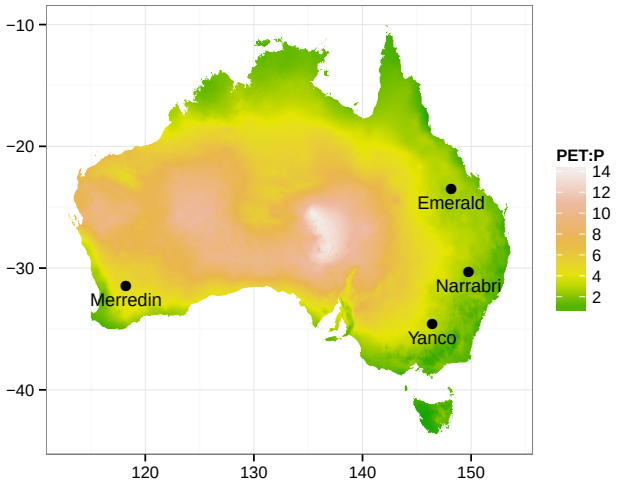
Applications en AgroBioSciences

Applications

- Évaluation de la valeur de traits phénotypiques sur le rendement en blé tendre en fontion des condition d'environnement et de conduite de culture (APSIM, Casadebaig *et* al.)
- Influence temporelle sur la biomasse produite de blé d'hiver de paramètres variétaux en conditions non limitantes (WWDM ou mini-STICS, Lamboni *et* al.)
- Effet de paramètres génétiques sur l'interception lumineuse de pommiers (MAppleT, Da Silva *et* al.)

APSIM: Agricultural Production Simulator

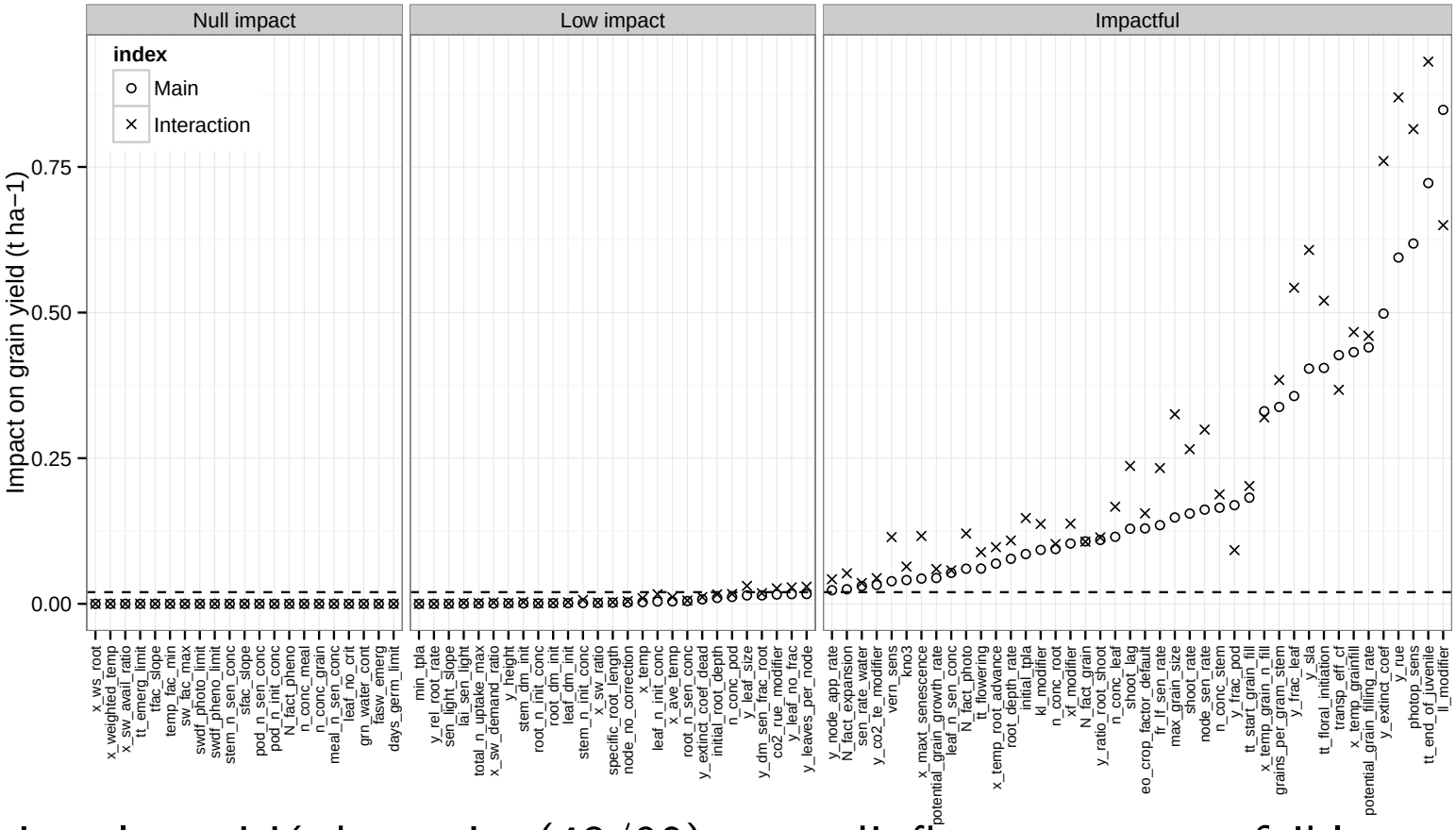
Évaluation de la valeur de traits phénotypiques sur le rendement en blé tendre en fontion des condition d'environnement et de conduite de culture



Carte des déficits hydriques ($\frac{ETP}{P}$) en Australie

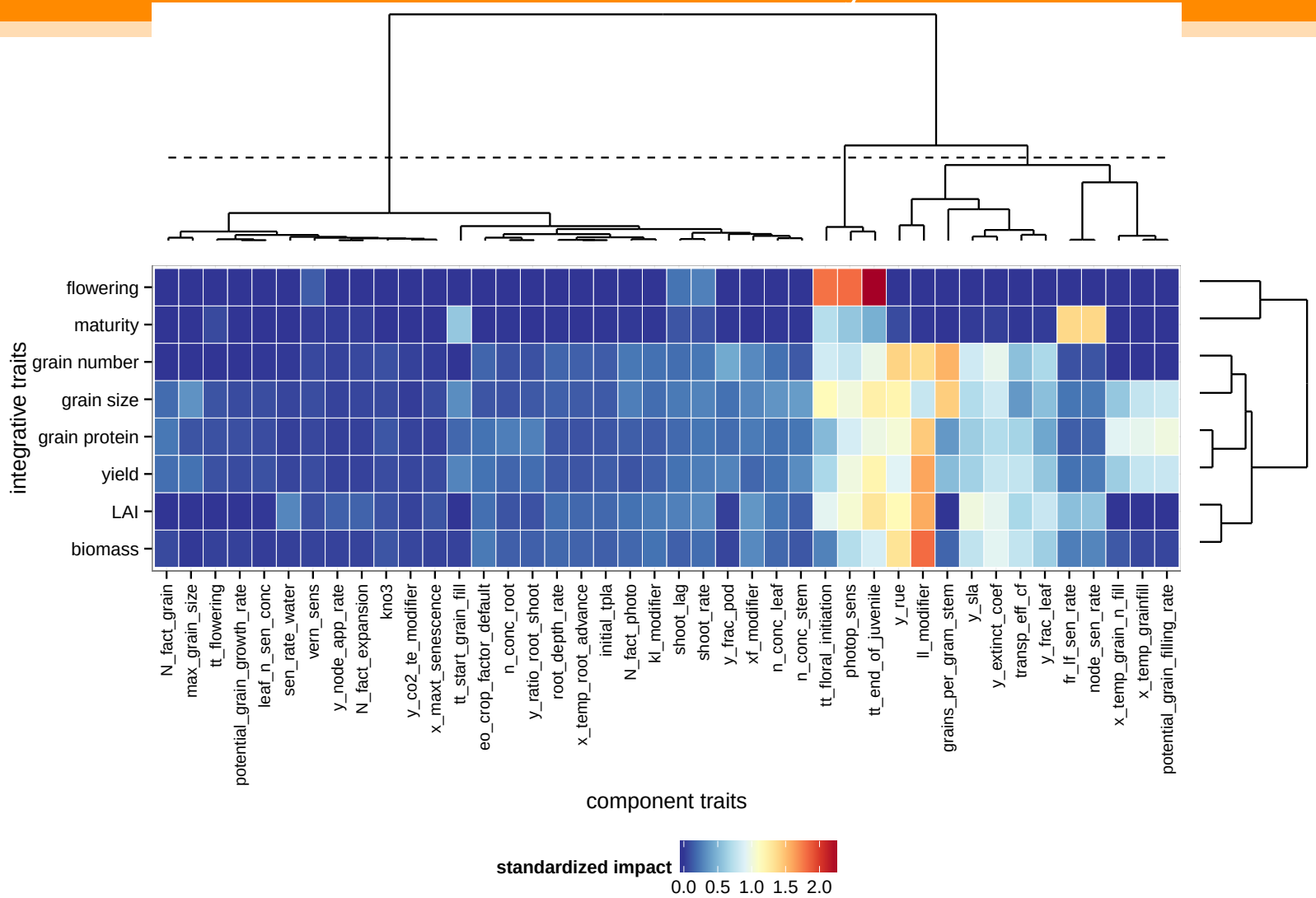
- 500 environnements : 125 années x 4 sites
- 2 niveaux de CO_2, 3 niveaux de fertilisation et 3 dates de semis
- De nombreux paramètres (516), 90 retenus, criblage par Morris (100 trajectoires, 6 niveaux)
- 500 * 2 * 3 * 3 * (90+1)*100 $\sim$ 81.9 millions d'évaluations

Screening for influent traits in control conditions



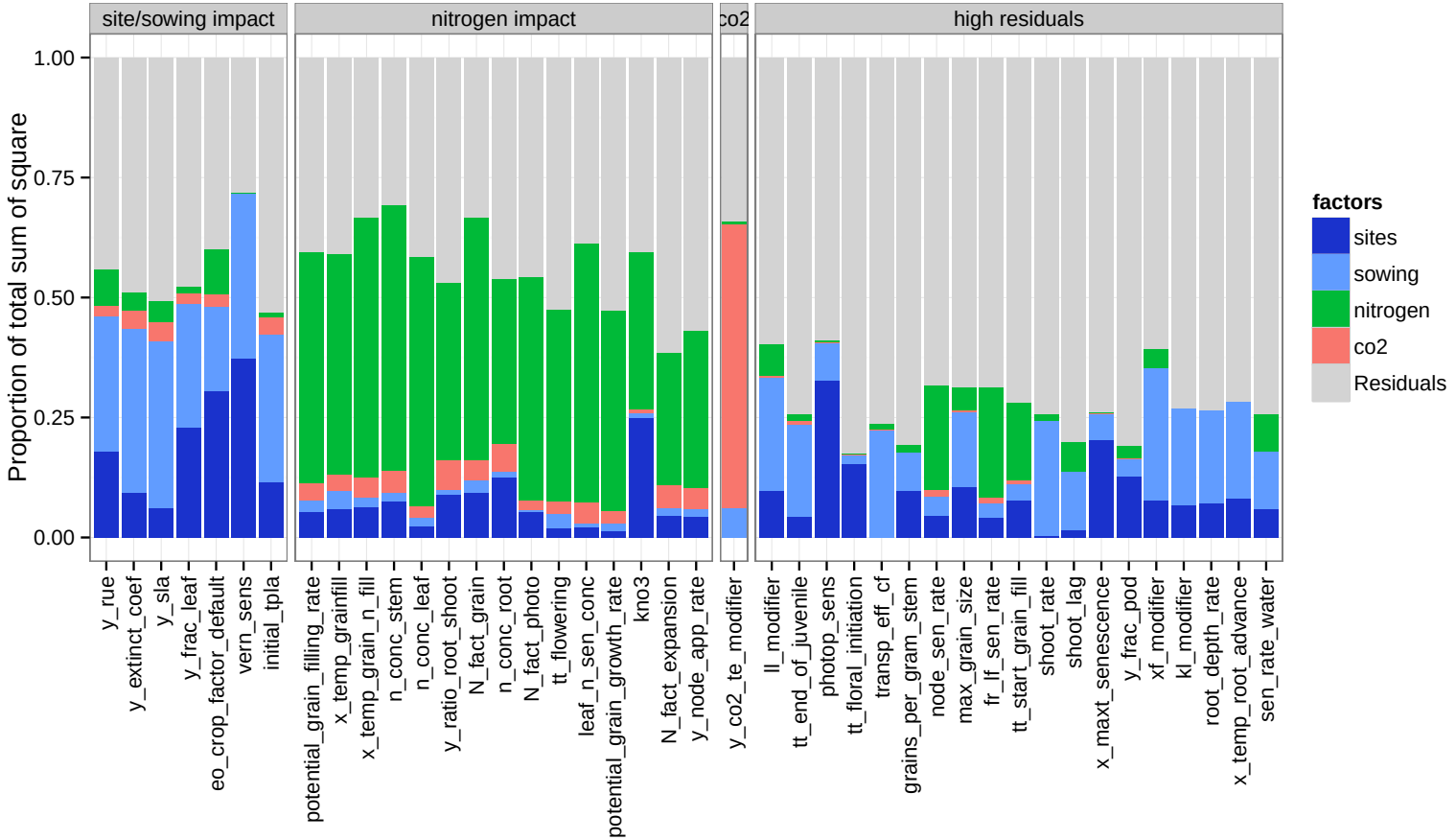
Environ la moitié des traits (48/90) sont n'inflencent pas ou faiblement le rendement ; 21 n'ont aucun impact sur le rendement ni les autres variables de sorties

Overview of the APSIM-wheat sensitivity to traits modification



Très peu de différences des effets entre les variables de sortie

Variance components of traits impact

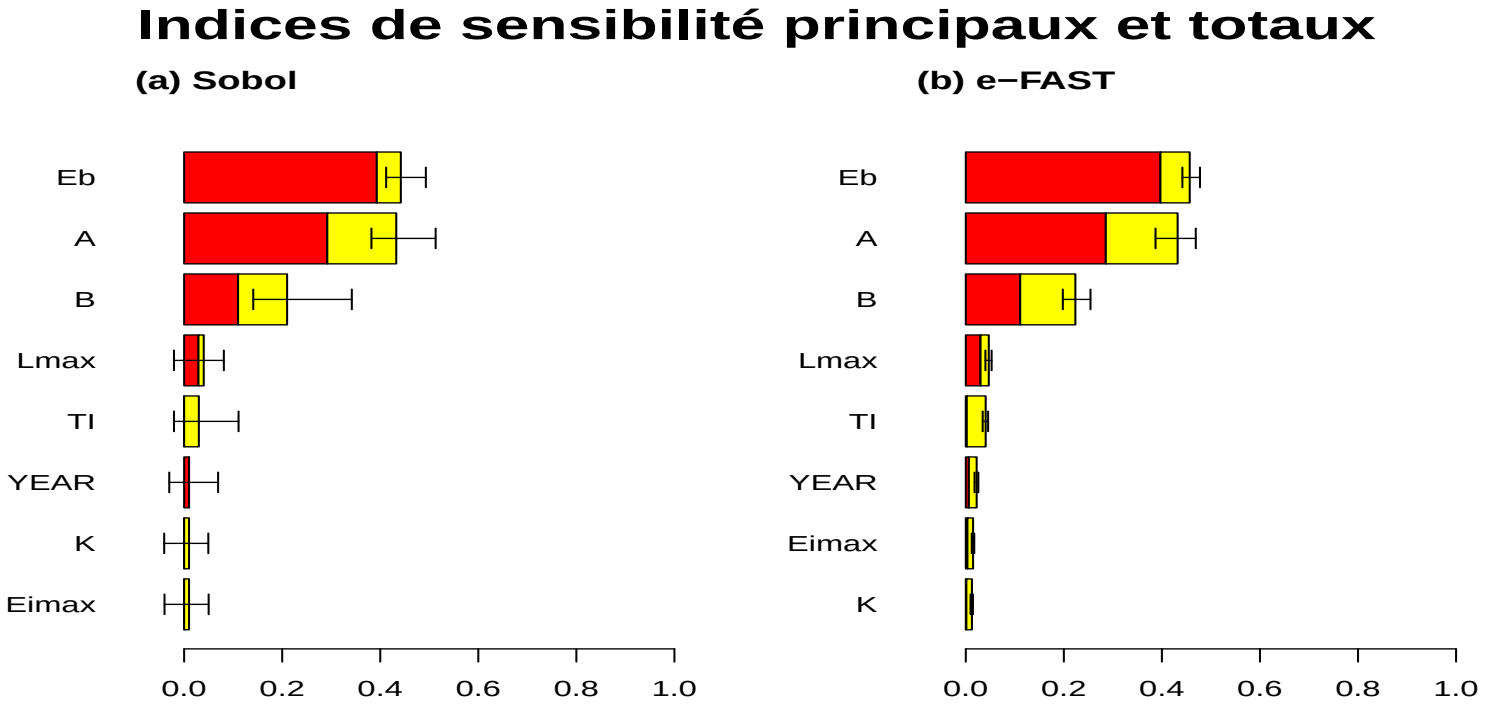


Association entre traits et facteurs environnementaux

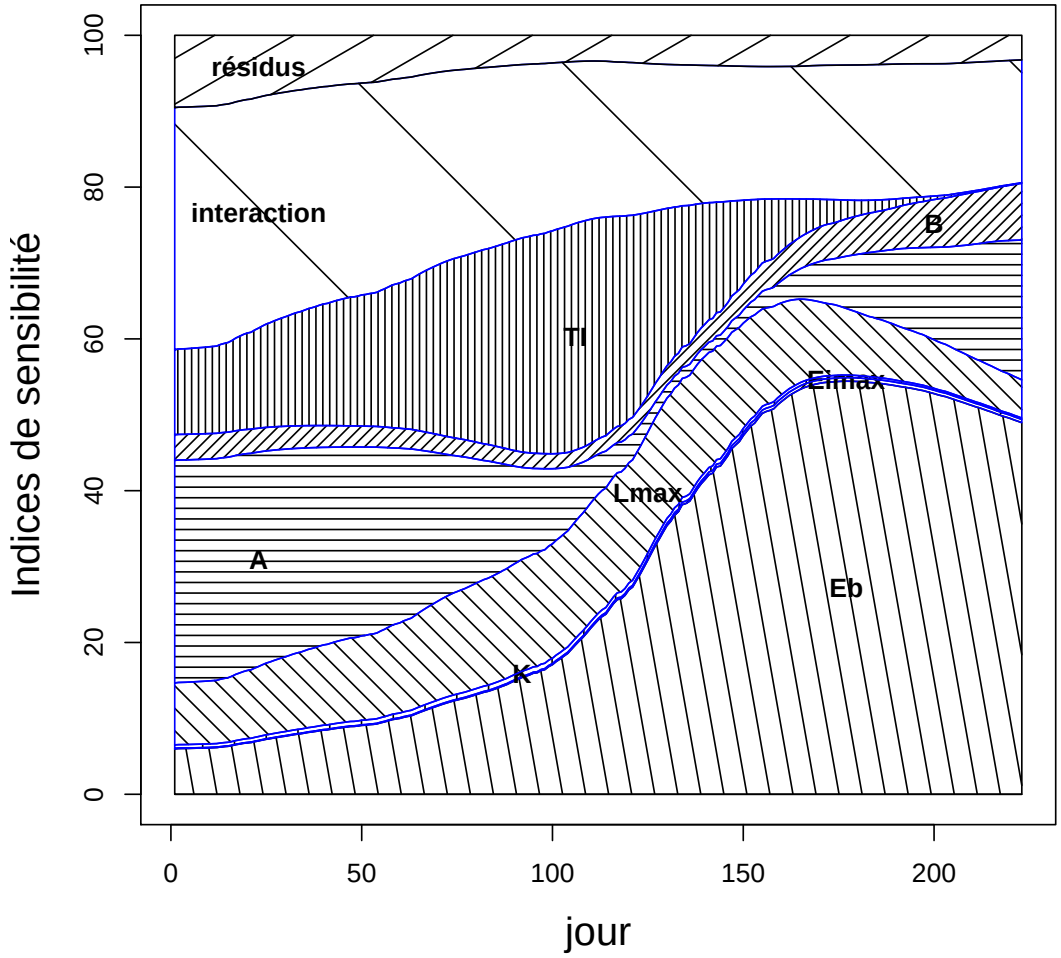
Mini-STICS sur blé d'hiver en conditions non limitantes

- Entrées = 7 paramètres + météo ; Sortie = biomasse produite
- Échantillonnage Monte Carlo de taille 1000

$Y(t) = \sum_t E_b Eimax[1 - e^{K\ LAI(t)}]\ PAR(t)$; $LAI(t) = Lmax[\frac{1}{1+e^{-A\ (T(t)-TI)}} - e^{B\ (T(t)-Tr(A,B,TI))}]$



Sur quelles périodes les paramètres sont les plus influents ?

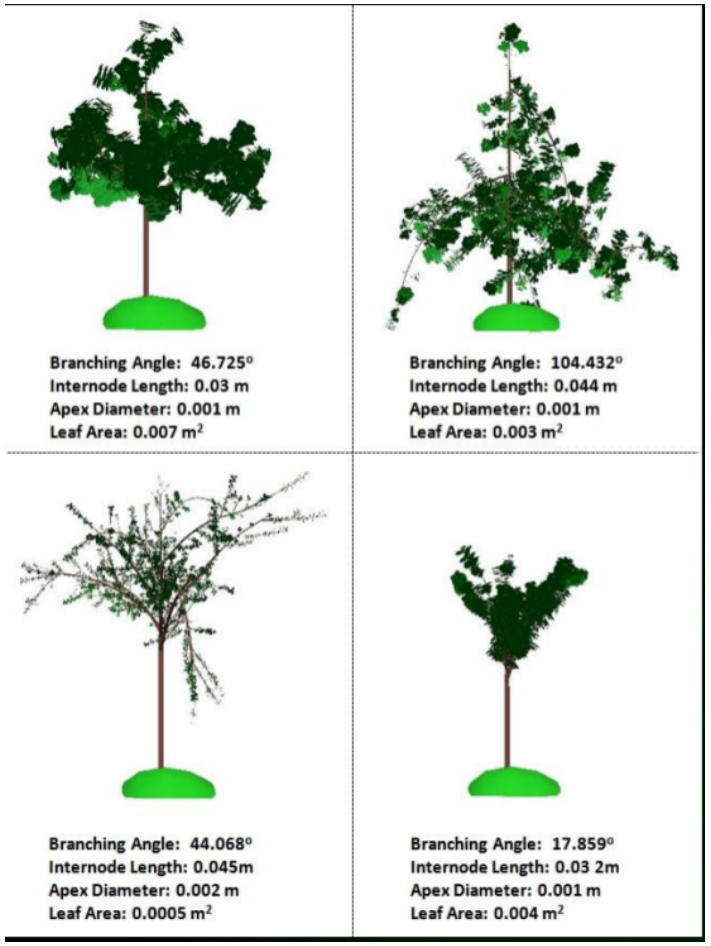


Lamboni *et* al., 2011.

package R multisensi

MappleT : Markov Apple Tree

MappleT (Costes *et al.*, 2008)
Manipulation de l'architecture des arbres (paramètres génétiques)
Optimisation de l'interception lumineuse
Quatre paramètres : leaf area, internode length, top shoot diameter, branching angle
Temps de calcul ($\sim 1h$ pour un arbre de 5 ans)



Métamodélisation

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathcal{G}(\mathbf{x}) \\ &\approx \mathcal{M}(x_1, ..., x_K) \end{aligned}$$

Métamodèle Polynomial

$$y = \sum_{a=1}^{A} \beta_a \left(\prod_{k=1}^{K} x_k^{d_{a,k}} \right) + \varepsilon$$

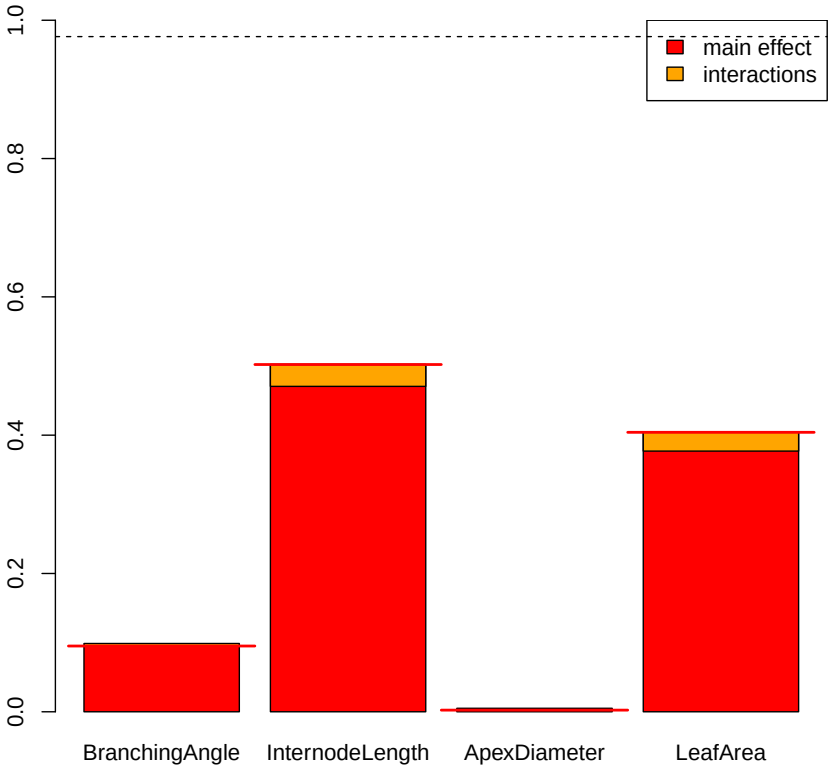
- K nombre de paramètres ;
- $A = C_{K+D}^{D}$ nombre de termes croisés ($0 \leq \sum_k d_{a,k} \leq D$) ;
- D degré maximal des polynomes ;
- ε terme d'erreur d'espérance nulle, indépendant des variables x_k.

Décomposition des sources de variation de x_1 (% de variance expliquée, R^2)

- Effet principal : $x_1 + x_1^2 + x_1^3$
- Total : $x_1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1\,x_2 + x_1\,x_2^2 + x_1^2\,x_2 + x_1\,x_3 + x_1\,x_3^2 + x_1^2\,x_3 + x_1\,x_2\,x_3 + \ldots$

Analyse de sensibilité

Métamodèle Polynomial de degré 3 évalué sur un plan LHS de taille 300



interception lumineuse : 97.6 % de variance expliquée

Quel plan d'expérience (design) ?

Les plans d'échantillonnage classiques

MC Monte Carlo

lhs Latin hypercube

Propriétés communes (= problèmes communs)

- échantillonnage indépendant entre les dimensions
- $\Rightarrow$ pas de contrôle des sous-espaces de dimension d, pour $d > 1$

Remplissage de sous-espaces en haute dimension : plusieurs méthodes

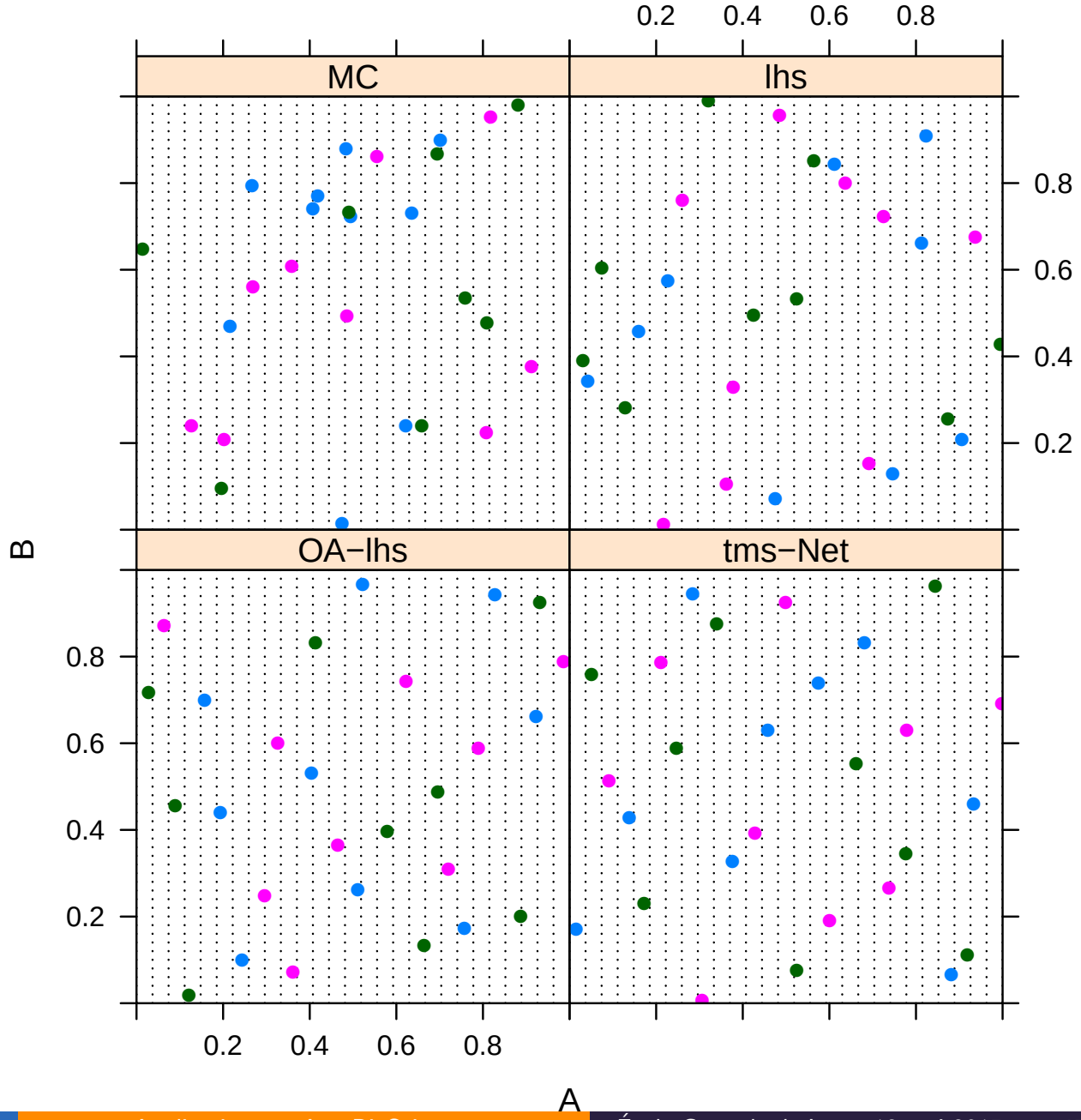
OA-lhs hypercube latin sur des tableaux orthogonaux (OA-based Latin hypercube)

tms-net digital net (with scrambling)

propriété de lhs ?

Exemple:
3 facteurs
$N = 27$
base $p = 3$

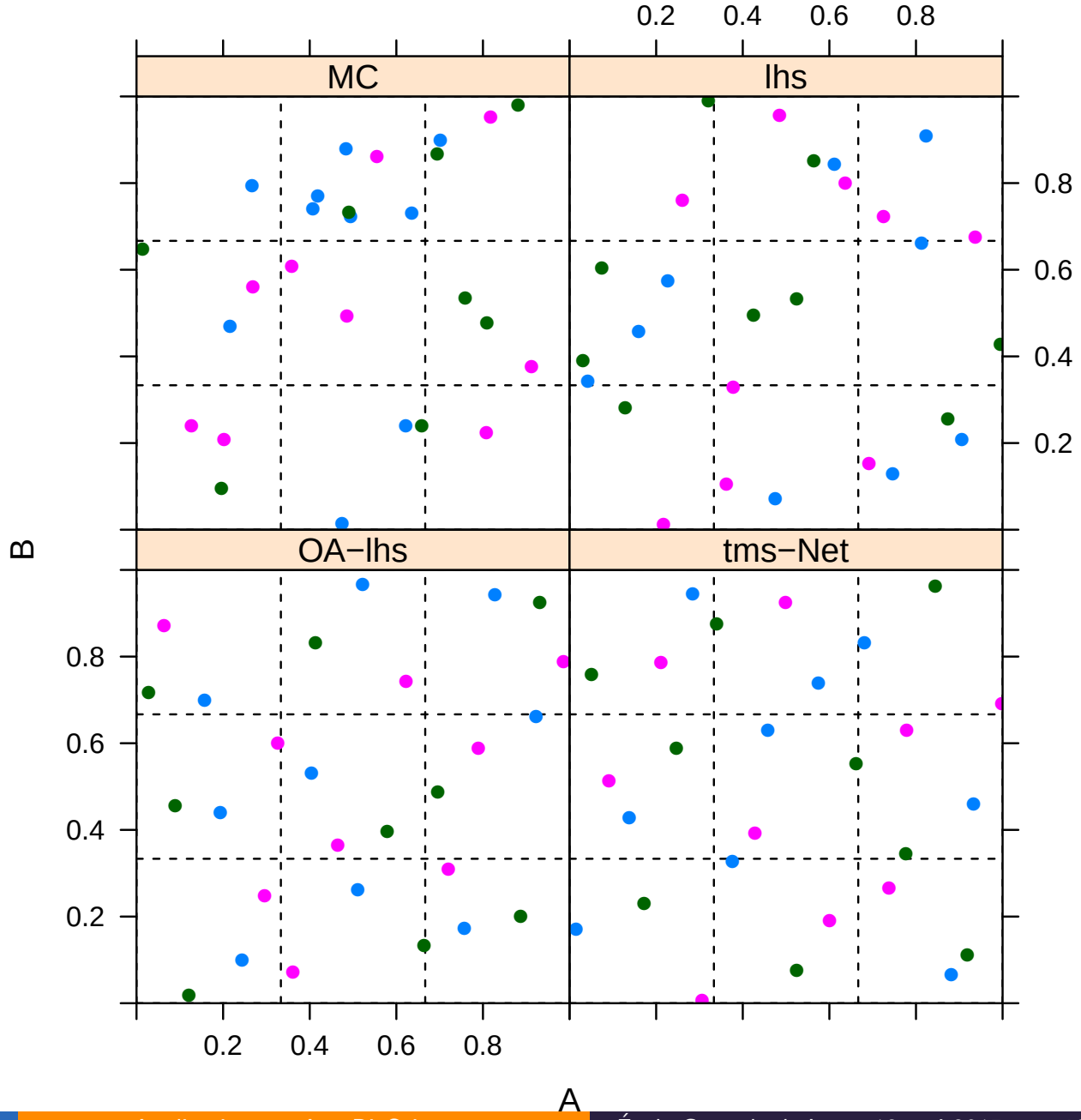
Design	?
MC	Non
lhs	Oui
OA-lhs	Oui
tms-net	Oui



propriété de OA (force 3)?

Exemple:
3 facteurs
$N = 27$
base $p = 3$

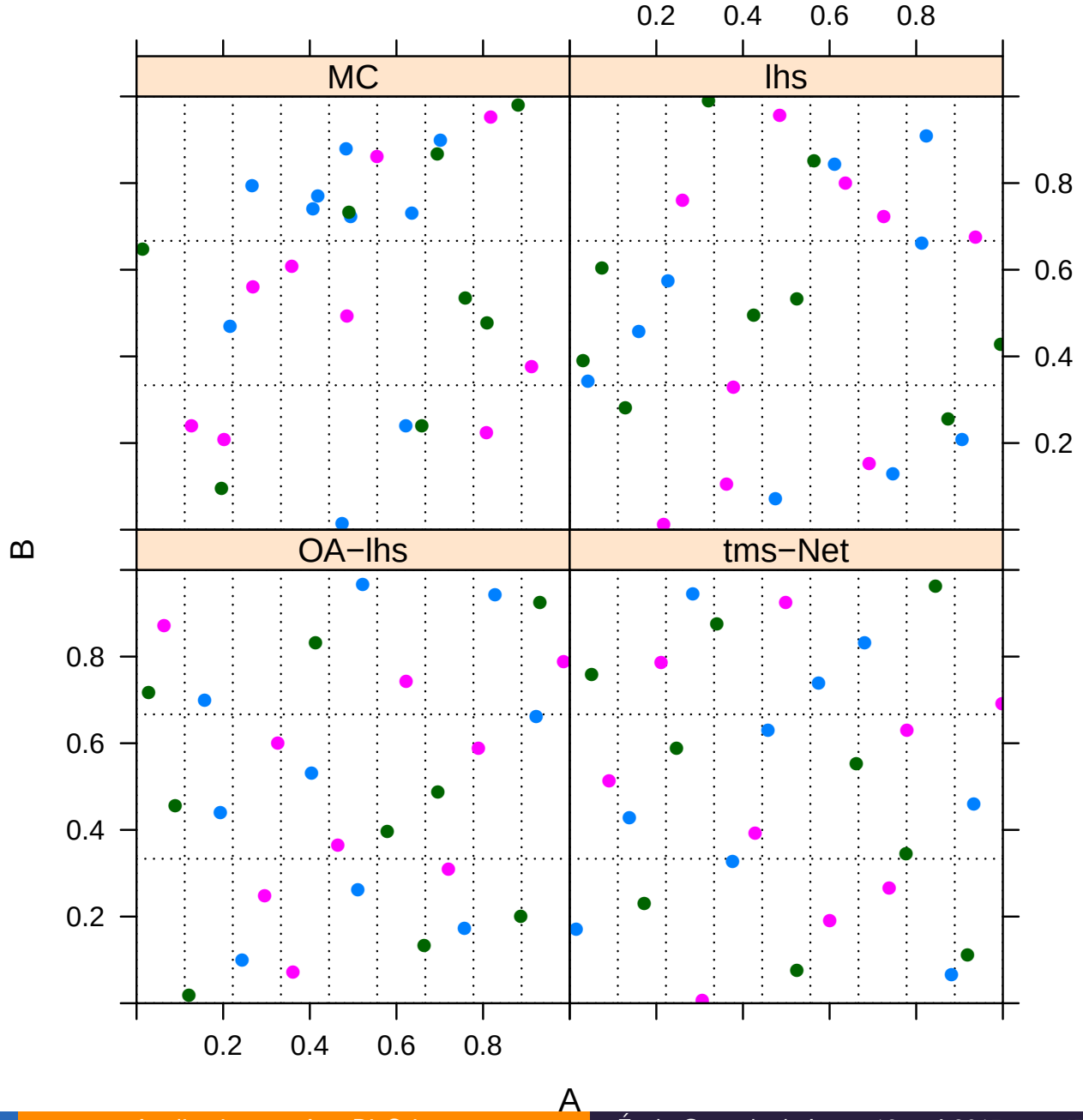
Design	?
MC	Non
lhs	Non
OA-lhs	Oui
tms-net	Oui



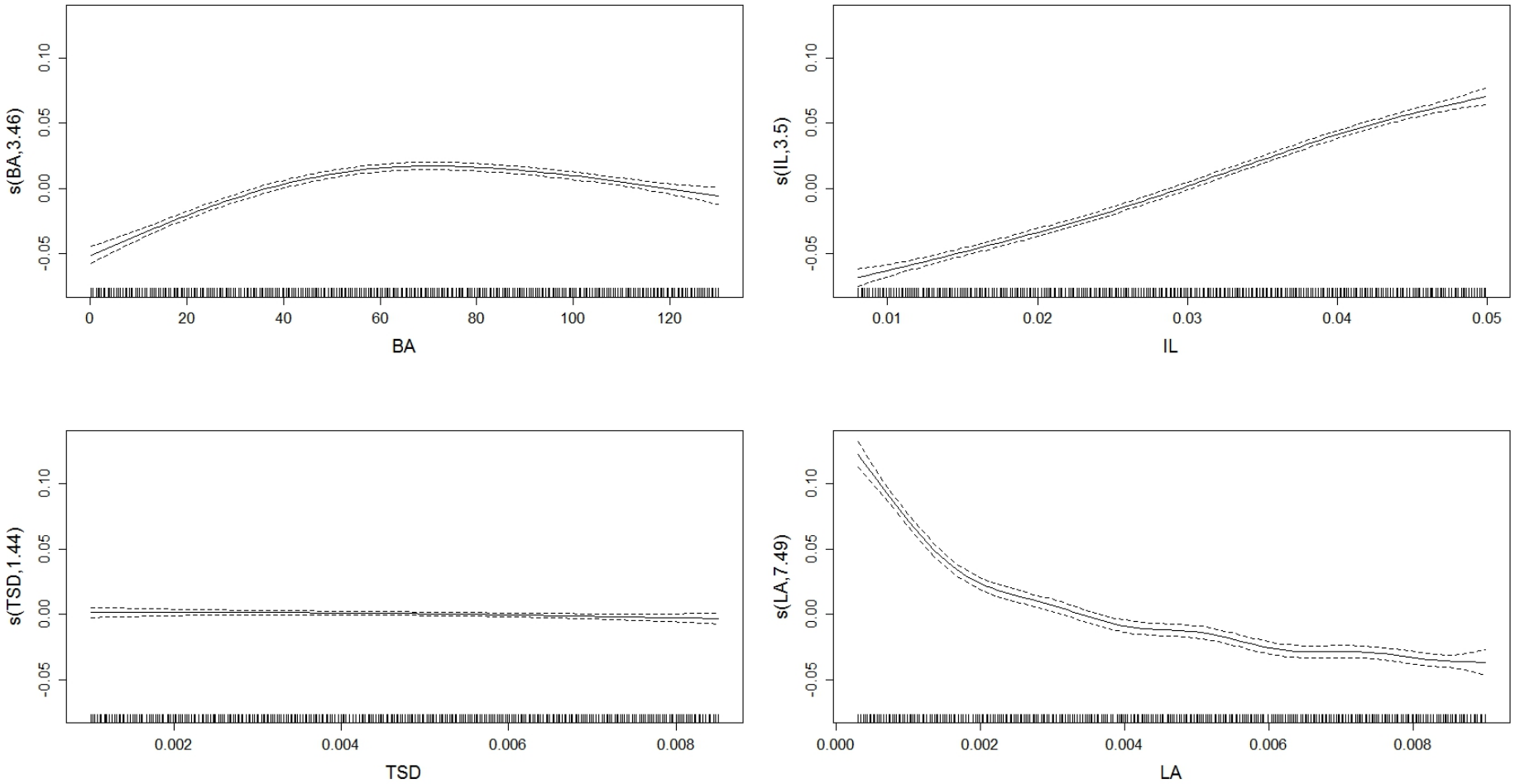
propriété d'équidistribution ?

Exemple:
3 facteurs
$N = 27$
base $p = 3$

Design	?
MC	Non
lhs	Non
OA-lhs	Non
tms-net	Oui



Métamodèle GAM, modèle additif généralisé, $y \approx \sum_{k=1}^{K} g_k(x_k)$



Références

- STICS, http://www6.paca.inra.fr/stics/
- Adamczyk K., Kiêu K., Monod H., Lannou C., Papaïx J. http://www.breves-de-maths.fr/modifier-un-paysage-agricole-pour-limiter-la-propagation-des-epidemies
- Casadebaig P., Zheng B., Chapman S., Huth N., Faivre R., Chenu K., 2015. Assessing trait potential impact on yield across a target population of environments: a global sensitivity analysis approach on a dynamic functional model in wheat. Bientôt soumis à PLoS Computational Biology.
- Costes E, Smith C, Renton M, Guédon Y, Prusinkiewicz P, Godin C. 2008. MAppleT Functional Plant Biology 35: 936–950.
- Da Silva D., Han L., Faivre R., Costes E., 2014. Influence of the variation of geometrical and topological traits on light interception efficiency of apple trees: sensitivity analysis and metamodelling for ideotype definition. Annals of Botany 114: 739–752, 2014.
- Faivre R., Iooss B., Mahévas S., Makowski D., Monod H., editors, 2013. Analyse de sensibilité et exploration de modèles. Applications aux modèles environnementaux. Collection "Savoir Faire", Quae, 2013, 352p.
- Jeuffroy, M.H., Recous, S., 1999. Azodyn: a simple model simulating the date of Nitrogen deficiency. European Journal of Agronomy, 10, 129-144.
- Lamboni M., Monod, Makowski D., 2011. Multivariate sensitivity analysis to measure global contribution of input factors in dynamic models. RESS, 96(4), 450–459.
- Morris M. D., 1991, Factorial sampling plans for preliminary computational experiments, Technometrics, 33, 161–174.
- Introduction to OpenAlea: a platform for plant modelling, T. Cokelaer, C. Pradal, C.Godin, (IHC 2010 slides) http://openalea.gforge.inria.fr/dokuwiki/doku.php
- Pujol G., Iooss B., Janon A., 2014. Package 'sensitivity'
- Saltelli A., Chan K., Scott E.M., editors., 2000. Sensitivity Analysis. Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, New York.
- Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S., 2008. Global Sensitivity Analysis : The Primer. Wiley, New York.